MATHEMATISCHE STATISTIK

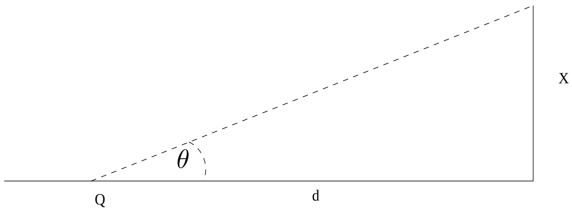
http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide VO: Prof. Felsenstein WS 2014

ÜBUNGSBLATT 2

7) Die stochastiaschen Größen X, Y sind beide standard normalverteilt mit Korrelation $\mathrm{cor}(X,Y) = \rho$. Man bestätige

$$\mathbb{E}\max(X,Y) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}\,.$$

8) Der Abstrahlwinkel θ vom Punkt Q eines Teilchens ist stetig gleichverteilt im Intervall $(0, \pi/2)$. Es trifft im Abstand X auf einen Schirm auf, der von Q die Entfernung d hat. Man gebe die Dichte von X an (und überlege sich, ob der Erwartungswert von X existiert).



9) Die normalverteilte Folge $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ ist genau dann schwach konvergent gegen die stochastische Größe $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, wenn die Parameter konvergieren:

$$X_n \xrightarrow{D} X \qquad \leftrightharpoons \qquad \lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$$

10) Die Zufallsvariable $X = (X_1, X_2)$ ist auf dem Einheitskreis stetig gleichverteilt, die Dichte von X auf $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2, \lambda_2)$ ist also $f = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_K$ für $K = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Man bestimme die Verteilungsfunktion, Dichte und den Erwartungswert $\mathbb{E}(R)$ für den Abstand vom Ursprung $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$.

11) X sei eine reellwertige Stochastische Größe und φ sei eine messbare Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $\varphi \circ X \in \mathscr{L}(\mathbf{P})$ integrierbar ist. F bezeichne die Verteilungsfunktion des Maßes $\mathbf{P}^X$ von X und F^{-1} sei die verallgemeinerte Inverse.

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int\limits_{(0,1)} \varphi(F^{-1}(t))\; d\lambda(t)$$

12) Wenn $\varphi \geq 0$ aus dem letzten Beispiel strikt monoton wachsend und linksstetig ist, dann kann der Erwartungswert auch durch

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int\limits_0^\infty (1 - F(\varphi^{-1}(t)))\; dt$$

berechnet werden, wobei φ^{-1} die verallgemeinerte Inverse von φ bezeichnet.

Hinweis: Man verwende die allgemeinen Darstellung von Integralen nicht-negativer Funktionen $f \geq 0$,

$$\int f\, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{f > t\})\; dt.$$