MATHEMATISCHE STATISTIK

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide VO: Prof. Felsenstein WS 2014

ÜBUNGSBLATT 3

13) Unter Verwendung der Stirling'schen Formel ($\Gamma(x+1) \simeq x^{x+1/2}e^{-x}\sqrt{2\pi}$) zeige man die punktweise Konvergenz der Dichte $f_n(x)$ der t_n-Verteilung gegen die Dichte der Standardnormalverteilung $\phi(x)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \phi(x)$$

und folgere die schwache Konvergenz $t_n \xrightarrow{D} N(0,1)$.

14) S_n sei χ^2_n-verteilt. Die *Fisher'sche Approximation* besagt, daß $\sqrt{S_n} - \sqrt{n}$ asymptotisch $N(0,1/2)$ verteilt ist,

$$\sqrt{S_n} - \sqrt{n} \stackrel{\bullet}{\sim} N(0,1/2).$$

Hinweis: Dieses Resultat soll unter Verwendung des folgenden Satzes bewiesen werden:
Wenn die Folge stochastischer Größen T_n

$$\sqrt{n}(T_n - \mu) \stackrel{\bullet}{\sim} N(0,\sigma^2)$$

erfüllt, dann gilt für eine differenzierbare Funktion $h(.)$ mit $h'(\mu) \neq 0$

$$\sqrt{n}(h(T_n) - h(\mu)) \stackrel{\bullet}{\sim} N(0,\sigma^2 h'(\mu)^2).$$

15) Die empirische Verteilungsfunktion $F^*_n(x)$ aus einer Stichprobe $X_i \sim F$ konvergiert für festes x in der Verteilung gegen eine Normalverteilung.

16) Für die verallgemeinerte Inverse einer Verteilungsfunktion bestätige man die beiden folgenden Eigenschaften:

i) $y \leq F(x) \quad \Longleftrightarrow \quad F^{-1}(y) \leq x$

ii) $F(F^{-1}(y)) \geq y$ und $F^{-1}(F(x)) \leq x$.

17) $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe mit stetiger Verteilung $X_i \sim F$. Das geometrische Mittel

$$G_n := [\prod_{i=1}^{n} F(X_i)]^{1/n}$$

bildet eine asymptotisch normalverteilte *Pivot-Größe*, d.h. $\sqrt{n}(G_n - e^{-1}) \xrightarrow{D} N(0, e^{-2}))$ für $n \to \infty$.
Gilt die Aussage auch für andere Mittel wie arithmetisches oder harmonisches?

Hinweis: Nach einer Transformation kann der zentrale Grenverteilubgssatz wie in Beispiel 14 verwendet werden.