MATHEMATISCHE STATISTIK

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide | VO: Prof. Felsenstein | WS 2014

ÜBUNGSBLATT 4

18) Die Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ sei stetig gleichverteilt, $X_i \sim U_{0,1}$. Zu den Ordnungsstatistiken bestimme man:

- **a)** die Dichte von $X_{(k)}$;
- **b)** die gemeinsame Dichte von $X_{(1)}, X_{(n)}$;
- **c)** die Dichte der *Spannweite* $R := X_{(n)} - X_{(1)}$;
- **d)** die Grenzverteilung für $2n(1-R)$ bei $n \to \infty$.

19) Unter den Voraussetzungen des letzten Beispiels, zeige man, daß für k_n mit $k_n/n \to p$ für $n \to \infty$ die Konvergenz

$$P[|X_{(k_n)} - p| < \epsilon] \to 1$$

für beliebiges $\epsilon > 0$ gilt.

20) Die stochastische Größe X sei stetig verteilt und $0 < p < 1$. Dann konvergiert das Stichprobenquantil in der Wahrscheinlichkeit gegen das Quantil x_p der Verteilung.
Hinweis: Man führe die Problemstellung auf die Aussage des letzten Beispiels zurück.

21)
- **a)** Man zeige, daß die momenterzeugende Funktion von $T = (T_1, \ldots, T_k)$ bei einer natürlich parametrisierten k-dimensionalen Exponentialfamilie die Form

$$\Psi(t) = \mathbb{E} \exp(t^\top T) = \frac{C(\theta_1, \ldots, \theta_k)}{C(\theta_1 + t_1, \ldots, \theta_k + t_k)}$$

für $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ hat. (Satz 2.6 ii))

- **b)** Man führe für die Normalverteilung eine natürliche Parametrisierung ein. Wie läßt sich dann die momenterzeugende Funktion der Normalverteilung mit der Darstellung aus (a) herleiten?

22) Eine diskrete stochastische Größe auf $\mathbb{N}$ folgt einer *Potenzreihenverteilung*, wenn die Punktwahrscheinlichkeiten in der Form

$$\mathbf{P}_\theta[X = k] \ = \ c(\theta)^{-1} \ g(k)\theta^k$$

wobei $g(.) \geq 0$, $\theta > 0$ und

$$c(\theta) \ = \ \sum_{i=0}^{\infty} g(i)\theta^i \ .$$

Für eine Stichprobe einer Verteilung solchen Typs zeige man:

- **a)** $\mathbf{P}_\theta$ bilden für $\theta > 0$ eine Exponentialfamilie.
- **b)** $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ bilden für jedes n eine Potenzreihenverteilung;
- **c)** Man gebe Wahrscheinlichkeitsverteilungen solchen Typs an.