ÜBUNGSBLATT 8

35) Die Lebensdauer X_i eines Bauteils sei Weibull-verteilt, $W_{2,\theta}$. Aus der Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ berechne man den ML-Schätzer für $\tau = 1/\theta$. Ist dieser Schätzer der UMVU-Schätzer?
HINWEIS: Die Verteilungsfunktion der $W_{2,\theta}$ Verteilung ist

$$F(t) \quad = \quad 1 \ - \exp\{-\frac{t^2}{\theta}\} \qquad t > 0 \ .$$

36) Die Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ sei normalverteilt $N(\theta, \sigma^2)$ mit bekannter Varianz σ^2. Die Schätzfunktion

$$T = \overline{X}_n^2 - \frac{\sigma^2}{n}$$

soll $\tau = \theta^2$ schätzen.

a) Ist T der UMVU-Schätzer für τ?

b) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, daß T negativ ist und untersuche die Konvergenz dieser Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$ bei $\theta = 0$ und bei $\theta \neq 0$.

37) Die Lebensdauern $X_1, \ldots, X_n$ bilden eine Stichprobe einer Exponential-Verteilung Ex_λ .
Die Statistik

$$\hat{R}(t) := \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad \sum X_i \leq t \\ (1 - \frac{t}{\sum_i X_i})^{n-1} & \text{falls} \quad \sum X_i > t \end{cases}$$

ist eine Schätzfunktion für die Zuverlässigkeitsfunktion $R(t) = P(X > t)$.
Ist $\hat{R}(t)$ der UMVU-Schätzer für die Zuverlässigkeitsfunktion $R(t)$?

38) $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe einer Geometrischen Verteilung G_θ. Man gebe Konstanten a und b an, sodaß die Schätzfunktion

$$T := b \sum_{i=1}^{n-1} X_i(aX_{i+1} - X_i)$$

erwartungstreu für $\tau = 1/\theta$ ist. Ist T konsistent für θ?

39) Für CR-effiziente Schätzung sind Regularitätsbedingungen erforderlich:
Die Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ stamme von einer stetigen Gleichverteilung $X_i \sim U_{0,\theta}$.
a) Man überlege sich, wo bei der Berechnung der CR-Schranke die Voraussetzungen nicht erfüllt sind.
b) Asymptotisch ist der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}$ nicht normalverteilt. Man gebe die Grenzverteilung von $n(\hat{\theta} - \theta)$ für $n \to \infty$ an.