11. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Für eine auf $\mathbb{R}$ periodische Funktion f mit $f(\omega+1) = f(\omega)\ \forall\, \omega \in \mathbb{R}$, die zudem auf $([0,1], \mathfrak{B} \cap [0,1], \lambda)$ integrierbar ist, berechne man

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(3^i\, \omega\right).$$

2. Man zeige, dass für jede ergodische Transformation T auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ gilt

$$\mathbb{E}X = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X \circ T^i = \infty \ P\text{–fs.} \tag{1}$$

3. Man zeige mit Hilfe des Ergodensatzes, dass die relative Häufigkeit einer jeden Ziffer $0, \ldots, r-1$ in einem beliebigen r-adischen Zahlensystem $(r \geq 2)$ für jedes $\omega \in [0,1)$ λ–fü gegen r^{-1} konvergiert.

4. Man zeige, dass eine maßtreue Transformation T auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ genau dann ergodisch ist, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P\left(T^{-i}(A) \cap B\right) = P(A)\, P(B) \quad \forall\, A, B \in \mathfrak{A}, \tag{2}$$

wobei $\mathfrak{A}$ eine Algebra ist, die $\mathfrak{S}$ erzeugt.

5. Ist $\mathfrak{A}$ eine Algebra mit $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A})$, so sind die Punkte 5a. - 5c. äquivalent:

   (a) T ist ergodisch.

   (b) $P - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i = P(A) \quad \forall\, A \in \mathfrak{A}\,,$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i = P(A) \quad P\text{–fs} \quad \forall\, A \in \mathfrak{A}\,.$

6. Man beweise, dass 2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen P, Q auf einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{S})$ entweder übereinstimmen oder singulär zueinander sind, wenn es eine Transformation $T : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\Omega, \mathfrak{S})$ gibt, die bezüglich beider Verteilungen maßtreu und ergodisch ist.

7. Ist $(\Omega, \mathfrak{S})$ ein Messraum und $T : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\Omega, \mathfrak{S})$, so zeige man, dass die Menge $\mathcal{P}$ der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\Omega, \mathfrak{S})$, für die T maßtreu ist, konvex ist. Weiters beweise man, dass T für $P \in \mathcal{P}$ genau dann ergodisch ist, wenn P ein extremer Punkt von $\mathcal{P}$ ist, d.h. es gibt keine Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P_0 \neq P_1 \in \mathcal{P}$ und $\alpha \in (0, 1)$, sodass $P = \alpha\, P_0 + (1 - \alpha)\, P_1$.