

Übung 7

0) Betrachte das Funktional ('interne Energie')

$$\mathcal{U}(\rho) = \int U(\rho) dx, U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, U(0) = 0$$

und setze $\Psi(r) = r^n U(r^{-n}), r > 0$. Nimm an dass Ψ nicht wachsend und \mathcal{U} displacement-konvex ist und zeige dass Ψ konvex ist.

1)

- Beweise die AM-GM Ungleichung, d.h. zeige für $x_1, \dots, x_n \geq 0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$

$$\prod_k x_k^{\lambda_k} \leq \sum_k \lambda_k x_k.$$

- Finde zumindest zwei Beweise¹ für die Ungleichung

$$E[|X|]^2 \leq E[X^2],$$

X eine beliebige Zufallsvariable, und stelle einen Zusammenhang zum ersten Teil des Beispiels her.

¹Hinweis: Jensen, Cauchy-Schwarz.