4. Übung Höhere Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Zeigen Sie, dass
$$Y(t) = e^{aW(t)-a^2t/2}$$
ein Martingal ist.

2. Wenden Sie das optional stopping Theorem auf Y an und bestimmen Sie so $\mathbb{E}(e^{-t\tau})$ für die Stoppzeit
$$\tau = \inf\{t \geq 0 : W(t) = a\}.$$

3. Wie Beispiel 2, für
$$\tau = \inf\{t \geq 0 : |W(t)| = a\}.$$

4. Wie Beispiel 2, für
$$\tau = \inf\{t \geq 0 : W(t) = a - bt\}(a, b > 0).$$

5. Die Poisson-Formel: Unter geeigneten Voraussetzungen gilt
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2in\pi x} f(x)dx.$$
Bestimmen Sie damit eine alternative Form für
$$\mathbb{P}(\max_{0\leq t\leq 1} |Wt| \leq x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n (\Phi((2n+1)x) - \Phi((2n-1)x).$$

6. Wie vorher, für
$$K(x) = \mathbb{P}(\max_{0\leq t\leq 1} |Bt| \leq x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n e^{-2n^2x^2}.$$

7. S_n sei ein einfacher symmetrischer Random Walk. Bestimmen Sie mithilfe des Spiegelungsprinzips die Wahrscheinlichkeit
$$\mathbb{P}(\max_{k\leq n} |S_k| \leq x | S_n = 0).$$