8. Übung Höhere Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Welche der bekannten Banachräume sind separabel (etwa $L_p, \ell_p, \mathbf{C}(X), \mathfrak{M}(X, \mathfrak{B})$, ad libitum erweiterbar, auch in Bezug auf die Grundräume).

2. Zeigen Sie, dass es für ein endliches reguläres Maß auf einem Banachraum einen abgeschlossenen separablen Teilvektorraum gibt, der volles Maß hat.

3. X sei ein metrischer Raum, $\tilde{X}$ seine Vervollständigung. Zeigen Sie: für ein endliches Maß μ auf $\mathfrak{B}(X)$ wird durch
$$\tilde{\mu}(A) = \mu(A \cap X)$$
ein Maß auf $\mathfrak{B}(\tilde{X})$ definiert. Wenn μ regulär ist, dann auch $\tilde{\mu}$, und μ_n konvergiert genau dann gegen μ, wenn $\tilde{\mu}_n$ gegen $\tilde{\mu}$ konvergiert.

4. Eine Folge μ_n von endlichen Radonmaßen in einem metrischen Raum konvergiert genau dann schwach gegen μ, wenn die Prohorov-Distanz $d(\mu_n, \mu)$ gegen 0 geht.

5. Die Radonmaße sind eine abgeschlossene Teilmenge (wenn man signierte Radonmaße zulässt, ein abgeschlossener Teilraum) von $(\mathfrak{M}, \|.\|_v)$.

6. Der schwache Grenzwert einer Folge von Radonmaßen in einem vollständigen metrischen Raum ist wieder ein Radonmaß.

7. Auf einem metrischen Raum X sind die Punktmaße δ_x für $x \in X$ Radonmaße (no na) und es gilt $d(\delta_x, \delta_y) = \min(1, d(x, y))$. Damit ist eine homöomorphe Einbettung von X in $(\mathfrak{M}_r, d(.,.))$ gegeben. Außerdem ist $\{\delta_x, x \in X\}$ abgeschlossen (das hat zur Folge, dass für Kompaktheit und dergleichen der Menge der Maße notwendig ist, dass der Grundraum dieselbe Eigenschaft hat).