ÜBUNGSBLATT 2

8) Der stochastische Vektor $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^k$ sei multivariat normalverteilt. $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ mit $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$ und $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k \times k}$. Für die Teilvektoren $X_1 \in \mathbb{R}^{k_1}$ und $X_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$ mit $k_1 + k_2 = k$, $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$, bestimme man die Regressionsfunktion $\mathbb{E}[X_1|X_2]$.

Hinweis: Man bestimme zunächst die bedingte Erwartung für zentrierte Größen, also $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$.

9) Es seien die stochastischen Größen X, Y quadratisch integrierbar mit fallender Regressionsfunktion $h(.)$,

$$\mathbb{E}(X|Y) \;=\; h(Y) \;.$$

Dann sind X und Y negativ korreliert.

10) Es soll eine Folge stochastischer Größen X_n auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\, \mathfrak{A}\,, \mathbf{P})$ sowie eine Sub-σ-Algebra $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}$ gefunden werden, sodass der Satz der *dominierten Konvergenz* zwar für die bedingten Erwartungen gilt, aber nicht in der unbedingten Version anwendbar ist.

11) Die Familien $(X_t, \mathfrak{A}_t)$ und $(Y_t, \mathfrak{C}_t)$ seien Martingale. Man begründe, dass $Z_t := X_t + Y_t$ ein an $\mathfrak{A}_t$ adaptiertes Martingal ist, wenn die Filtrationen $\mathfrak{A}_t = \mathfrak{C}_t$ gleich sind. Es soll ein Beispiel gefunden werden, dass Z_t kein Martingal (adaptiert an die kanonische Filtration) ist, wenn $\mathfrak{A}_t$ und $\mathfrak{C}_t$ verschieden sind.

12) Die Folge Y_i bestehe aus unabhängig und identische verteilten Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f_0 bezüglich des Maßes μ auf $\mathbb{R}$. f_1 sei eine weitere Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich μ. Dann bilden die *Likelihood-Quotienten*

$$L_n \;:=\; \frac{\prod_{i=1}^n f_1(Y_i)}{\prod_{i=1}^n f_0(Y_i)}$$

ein Martingal adaptiert an die kanonische Filtration von Y_i.

13) Es sei $X_n, n \in \mathbb{N}$ ein Martingal (bezüglich der kanonischen Filtration) mit $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$, wobei $X_0 \equiv 0$. Dann gilt

a) Die Zuwächse sind unkorreliert, für $j \neq k$ ist

$$\mathbb{E}(X_k - X_{k-1})(X_j - X_{j-1}) \;=\; 0 \qquad ,$$

b)

$$\mathbb{E}X_n^2 \;=\; \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k - X_{k-1})^2 \qquad ,$$