

## ÜBUNGSBLATT 10

- 51) Zur Verteilungsfunktion der Stichprobe  $X_i \sim F$  besitzt den Endpunkt

$$x_R := \sup\{x | F(x) < 1\}$$

Dann konvergiert das Maximum gegen  $x_R$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n \xrightarrow{f.s.} x_R .$$

- 52) Die Verteilungsfunktion  $F$  von  $X_i$  sei stetig, auch  $F^{-1}$  sei stetig. Man zeige, dass dann

$$Z_n := n(1 - F(M_n)) \quad (52-1)$$

eine Grenzverteilung besitzt und bestimme diese Verteilung.

Daraus soll für die Gleichverteilung  $X_i \sim U_{0,1}$  eine Grenzfolge im Sinne von (52-1) gefunden werden.

- 53) Für eine gleichverteilte Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  mit  $X_i \sim U_{0,\theta}$  besitzt

$$-n M_n + n\theta$$

eine Grenzverteilung. In welchen Anziehungsbereich fällt also die Gleichverteilung ?

- 54) Die Verteilung mit

$$F(x) = \exp(-x^{-\alpha}) \mathbb{1}_{0,\infty}(x)$$

für  $\alpha > 0$  heißt *Frechet-Verteilung*. Man zeige, dass diese Verteilung **max-stabil** ist, also  $a_n, b_n$  existieren, sodass  $F_n$  als Verteilungsfunktion von  $M_n$

$$F_n(a_n x + b_n) = F(x)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

Genau diese Eigenschaft zeige man auch für die Weibull- und die Gumbelverteilung.

- 55) Für nicht negative  $X_i$  (nicht unbedingt unabhängige) stochastische Größen mit Maximum  $M_n$  zeige man für beliebiges  $c \in \mathbb{R}$

a)

$$M_n \leq c + \sum_{i=1}^n (X_i - c)^+$$

b) und daher

$$\mathbb{E}M_n \leq c + \sum_{i=1}^n \int_c^\infty \mathbf{P}(X_i > t) dt$$

c) für identisch exponential verteilte Größen  $X_i \sim Ex_\lambda$  gebe man eine obere Schranke für  $\mathbb{E}M_n$  an.

56) Für eine Stichprobe  $X_i$  mit absolutstetiger Verteilung  $X_i \sim F$  sei die stochastische Größe  $R_n$  der Indikator des Eintritts eines *Rekords*, d.h.:

$$R_n = 1 \quad \text{nur wenn} \quad X_n > M_{n-1} = \max(X_1, \dots, X_{n-1})$$

und 0 sonst. Es soll gezeigt werden, dass  $R_n \sim B_{1,1/n}$  Binomial-verteilt und unabhängig sind.

HINWEIS: Man betrachte die Permutation  $\pi^n$  der Zahlen  $1, \dots, n$ , die sich aus der Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  durch  $X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < \dots < X_{\pi_n}$  (Ränge der Ordnungsstatistiken) ergibt. Diese Permutation muß aus einem Raum der Permutationen mit Gleichverteilung darauf kommen.  $\pi^n$  ist unabhängig von  $R_{n+1}$ .

57) Es sei  $R_n$  die Anzahl der Rekorde bis  $n$ .

a) Man zeige die Äquivalenzen

$$\mathbb{E}R_n \simeq \log(n) \quad \text{und} \quad \text{Var}(R_n) \simeq \log(n)$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

b) Es gilt

$$\frac{R_n - \log(n)}{\sqrt{\log(n)}} \xrightarrow{D} N(0, 1) \quad .$$

HINWEIS: Man prüfe die Voraussetzungen des zentralen Grenzwertsatzes mit Hilfe der Lyapunov-Bedingung.

58) Die Zeitpunkte der  $n$ -ten Rekorde sei  $T_n$  mit  $T_1 = 1$  und

$$T_{n+1} := \min\{j > T_n | R_j = 1\}$$

Man zeige, dass  $T_n$  die Markov-Eigenschaft erfüllt und bestimme die gemeinsame Verteilung

$$\mathbf{P}(T_1 = j_1, \dots, T_2 = j_2, \dots, T_n = j_n) \quad \text{für} \quad j_1 < j_2 < \dots < j_n \quad .$$

59) Die Stichprobe sei exponentialverteilt,  $X_i \sim EX_1$ . Die Rekordwerte seien  $W_n = X_{T_n}$ . man bestimme die Verteilung von  $W_n$  und zeige

$$\frac{1}{\sqrt{n}} W_n - \sqrt{n} \xrightarrow{D} N(0, 1) \quad .$$

BEMERKUNG: Man bemerke das unterschiedliche Grenzverhalten der Prozesse  $M_n$  und  $W_n$ .