

Übung Höhere Wahrscheinlichkeitstheorie - WS18

Hidden Markov Models-I.

1. Eine variable Fabrik

Ein Produktionsprozess in einer Fabrik befindet sich entweder in einem guten Zustand oder in einem schlechten Zustand. Die Fabrik kann den Zustand nur am Ende jeder Zeiteinheit wechseln. Aus dem guten Zustand kann die Fabrik am Ende jeder Zeiteinheit mit Wahrscheinlichkeit 0.05 in den schlechten Zustand übergehen. Sobald die Fabrik im schlechten Zustand ist, bleibt sie für immer in diesem Zustand. Die Fabrik produziert ein einzelner Artikel in jeder Zeiteinheit. Jeder Artikel, der im guten Zustand der Fabrik produziert wird, hat eine akzeptable Qualität (Artikel a) mit Wahrscheinlichkeit 0.99 und jeder Artikel, der im schlechten Zustand der Fabrik produziert wird, hat eine nicht akzeptable Qualität (Artikel u) mit Wahrscheinlichkeit 0.3. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Fabrik im gutem Zustand beginnt, ist 0.85.

Nehmen Sie an, daß die Folge von drei beobachteten Artikeln (a,u,a) ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser Folge von beobachteten Artikeln und der höchstwahrscheinlichsten Pfade.

2. Ein paläontologisches Temperaturmodell

Nehmen wir an, daß es nur jährliche Durchschnittstemperaturen wie „heiß“ (H) und „kalt“ (C) gab. Zusätzlich nehmen wir auch an, daß die Wahrscheinlichkeit eines heißen Jahres, gefolgt von einem anderen heißen Jahr ist 0.75 und die Wahrscheinlichkeit eines kalten Jahres nach einem kalten Jahr ist 0.55 - beide unabhängig von der Temperatur in den Vorjahren. Nehmen wir auch an, dass die aktuelle Forschung eine Korrelation zwischen der Baumringgrößen und der jährlichen Durchschnittstemperatur anzeigt. Der Einfachheit halber betrachten wir nur drei verschiedene Baumringgrößen: klein bezeichnet als S, mittel bezeichnet als M und groß bezeichnet als L. Dann kann der Zusammenhang zwischen jährlicher Durchschnittstemperaturen und Baumringgrößen mit der folgenden Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} & S & M & L \\ H & 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ C & 0.75 & 0.2 & 0.05 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die höchstwahrscheinlichste jährliche Durchschnittstemperaturen in den vergangenen Jahren, wenn die Folge von Baumringgrößen (S,M,M,L) beobachtet wurden.

3. Das gelegentlich betrügerische Casino

In einem hypothetischen unehrlichen Kasino verwendet das Kasino meistens einen fairen Würfel, gelegentlich wechselt jedoch das Kasino heimlich zu einem geladenen Würfel und später kehrt das Casino zurück zum fairen Würfel. Ein probabilistischer Prozess bestimmt die Hin- und Herwechseln von geladenem Würfel zu angemessenem Würfel und zurück nach jedem Wurf des Würfels, wobei der Wechsel von fairem zu geladenem Würfel mit Wahrscheinlichkeit 0.07 und von geladenem zu fairem Würfel mit Wahrscheinlichkeit 0.2 stattfindet. Nehmen wir außerdem an, dass der geladene Würfel die Augenzahl 6 mit der Wahrscheinlichkeit 0.5 und die restlichen fünf Zahlen mit der Wahrscheinlichkeit 0.1 produziert.

Kam es zum Einsatz des geladenen Würfels laut des höchstwahrscheinlichsten Szenarios, wenn die beobachtete Folge der Augenzahlen (2,6,5) war ?