**2. Übung Höhere Wahrscheinlichkeitstheorie WS18**

1. $(X_1, \ldots)$ sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1,
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n \geq 0.$$
Zeigen Sie, dass
$$S_n^2 - n$$
ein Martingal ist.

2. $S_n$ sei ein einfacher symmetrischer Random Walk, $a \in \mathbb{N}$,
$$\tau = \inf\{n : |S_n| = a\}.$$
Wenden Sie das optional stopping theorem auf das Martingal aus dem vorigen Beispiel an und bestimmen Sie so den Erwartungswert von $\tau$.

3. $(X_1, \ldots)$ sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit Erwartungswert 1. Zeigen Sie, dass
$$Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$$
ein Martingal ist.

4. $S_n$ sei ein einfacher symmetrischer Random Walk, $a, b \in \mathbb{N}$,
$$\tau = \inf\{n : S_n \in \{-a, b\}\}.$$
Wenden Sie das optional stopping theorem auf die Martingale $S_n$ und $S_n^2 - n$ an und bestimmen Sie so die Verteilung von $S_\tau$ und den Erwartungswert von $\tau$.

5. $S_n$ sei ein einfacher symmetrischer Random Walk, $L_n$ seine lokale Zeit,
$$\tau = \inf\{n : |S_n| = 2\}.$$
Bestimmen Sie die Verteilung von $S_\tau$.