

## ÜBUNGSBLATT 3

- 12) Die Familien  $(X_t, \mathfrak{A}_t)$  und  $(Y_t, \mathfrak{C}_t)$  seien Martingale. Man begründe, dass  $Z_t := X_t + Y_t$  ein an  $\mathfrak{A}_t$  adaptiertes Martingal ist, wenn die Filtrationen  $\mathfrak{A}_t = \mathfrak{C}_t$  gleich sind. Es soll ein Beispiel gefunden werden, dass  $Z_t$  kein Martingal (adaptiert an die kanonische Filtration) ist, wenn  $\mathfrak{A}_t$  und  $\mathfrak{C}_t$  verschieden sind.

- 13) *Einfache symmetrische Irrfahrt*  $X_n$ , also  $X_n = \sum_{i=1}^n Z_i$  mit dem Startwert  $X_0 \equiv x_0, x_0 < 1$  und  $x_0 \in \mathbb{Z}$  konstant und  $Z_i, i \geq 1$  unabhängig und identisch alternativ verteilt mit  $\mathbf{P}(Z = -1) = \mathbf{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}$ . Sei die stochastische Folge

$$\tau_m := \inf\{k \in \mathbb{N} | X_k = m\} \quad \text{für } m \in \mathbb{N}.$$

- a) Man zeige, dass  $\tau_1, \tau_2, \dots$  eine geordnete Folge von Stoppzeiten ist.
- b) Man zeige, dass  $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \tau_4 - \tau_3, \dots$  eine iid Folge mit der Verteilung von  $\tau_1$  ist.
- c) Man überlege sich, dass

$$\mathbf{P}(\tau_1 = k - 1 | X_0 = -1) = \mathbf{P}(\tau_2 = k - 1 | X_0 = 0).$$

- 14) Unter den Annahmen des letzten Beispiels soll die *erzeugende Funktion*  $\phi(t) := \mathbb{E}t^\tau$  für die stochastische Größe  $\tau := \tau_1$  bestimmt werden.

- a) Man zeige, dass

$$\phi(t) = \frac{1}{t} - \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}$$

die erzeugende Funktion von  $\tau_1$  ist.

- b) Wie ist die erzeugende Funktion von  $\tau_m$  für  $m > 1$ ?
- c) Wie kann aus  $\phi(t)$  (wie bei jeder erzeugende Funktion einer Verteilung auf  $\mathbb{N}$ ) die Punktwahrscheinlichkeit  $\mathbf{P}(\tau = k)$  bzw. die Momente bestimmt werden?

- 15) Für die asymmetrische Irrfahrt  $S_n$  mit  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  für unabhängige identisch verteilte  $X_i$

$$\mathbf{P}[X_i = 1] = 1 - \mathbf{P}[X_i = -1]$$

für  $p \neq \frac{1}{2}, q = 1 - p$ , mit  $S_0 = 0$ . Es sei  $\tau := \min\{n | S_n \notin (-a, b)\}$  für  $a, b \in \mathbb{N}$ . Man zeige, dass  $\mathbb{E}\tau < \infty$  und dass

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \quad \text{und} \quad S_n - n(p - q)$$

Martingale sind.

- 16) Unter Verwendung der Martingaleigenschaften zeige man für die Irrfahrt aus dem letzten Beispiel

$$\mathbf{P}(S_\tau = b) = \frac{1 - (p/q)^a}{(q/p)^b - (p/q)^a}$$

und bestimme  $\mathbb{E} \tau$ .