ÜBUNGSBLATT 5

22) Es sei X eine Zufallsgröße, für die die Moment-erzeugende Funktion $\psi_X(s) = \mathbb{E}\,\exp(sX)$ für $s > 0$ existiert, Es sollen folgende Ungleichungen für Abweichungswahrscheinlichkeiten gezeigt werden:

a)

$$\mathbf{P}[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}(X^+)}{t} \qquad t > 0$$

b) CHERNOFF-SCHRANKE

$$\mathbf{P}[X \geq t] \leq \inf_{s \geq 0} \mathrm{e}^{-s.t} \psi_X(s)$$

23) Noch einmal symmetrischer Random-Walk (mit Sprunghöhe $j_n \geq 0$) und Startwert $X_0 \equiv 0$, also $X_n = \sum_{i=1}^n j_i Z_i$ und $Z_i, i \geq 1$ unabhängig und identisch alternativ verteilt mit $\mathbf{P}(Z = -1) = \mathbf{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}$.

a) Bildet auch diese Irrfahrt ein Martingal?

b) Man zeige für $x > 0$

$$\mathbf{P}[|X_n| \geq x] \leq 2\exp(-\frac{x^2}{2\,\sum_{i=1}^n j_n^2}) \,.$$

HINWEIS: Voriges Beispiel und $\cosh(x) \leq \exp(-\frac{x^2}{2})$.

24) Es soll das Konvergenzverhalten des Random-Walks X_n aus dem vorigen Beispiel untersucht werden. Unter welchen Bedingungen an die Folge j_n konvergiert X_n in Wahrscheinlichkeit? Gilt unter diesen Bedingungen auch die fast sichere Konvergenz?

HINWEIS: *Kolmogorov'scher Dreireihensatz* oder *Dreireihenkriterium* für die fast sichere Konvergenz von stochastischen Summen.

25) Für den *Galton-Walton-Prozess* Z_n mit Erwartung $\mathbb{E}X_{k,i} = m$ der Nachkommenverteilung zeige man, dass

$$W_n = \frac{Z_n}{m^n}$$

(bezüglich der natürlichen Filtration der $X_{k,i}$) ein Martingal ist und bestimme die Varianz $\mathbb{V}(Z_n)$.

26) X sei eine nichtnegative, integrierbare Stochastische Größe mit $\mathbf{P}(X = 0) < 1$.

a) Man zeige die *Paley-Zygmund* Ungleichung

$$\mathbf{P}(X > 0) \geq \frac{(\mathbb{E}[X])^2}{\mathbb{E}[X^2]} \,.$$

b) Man verwende a) für untere Schranken für $\mathbf{P}(Z_n > 0)$, wenn Z_n ein Galton-Watson Verzweigungsprozess (ausnahmsweise) mit Startwert $Z_0 = k, k \geq 1$ ist.