ÜBUNGSBLATT 6

27) Sind die $Z_i \sim B_{\frac{1}{2}}$ unabhängig, so kann man $X_i := 2^{i-1}\ (2\,Z_i - 1)$ als Nettogewinn des i-ten Spiels interpretieren, wenn man bei diesem Spiel € 2^{i-1} einsetzt, also in jedem Schritt seinen Einsatz verdoppelt.

- **a)** Zeigen Sie $S_n := \sum\limits_{i=0}^{n} X_i$ und $\mathfrak{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ bilden ein Martingal.
- **b)** Beweisen Sie $T := \min\{i : X_i > 0\}$ ist eine endliche Stoppzeit.
- **c)** Man berechne S_T und $\mathbb{E}S_T$.

28) Unter den Voraussetzungen des letzten Beispiels interpretiere man $S_{T\wedge n}$ und berechne $S_{T\wedge n}$ sowie $\mathbb{E}S_{T\wedge n}$. Man berechne $\liminf\limits_n \int_{[T>n]} |S_n|\ dP$, $\mathbb{E}\,|S_n|$ und $\sup\limits_n \mathbb{E}\,|S_n|$.

29) S_n sei ein *unbeschränkter Random Walk* (d.h. : $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, X_i unabhängig, identisch verteilt mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$) mit dem Sprungmaß (Verteilung der X_i)

$$\mathbf{P}[X = 1] = p_1, \quad \mathbf{P}[X = 2] = p_2, \quad \mathbf{P}[X = \infty] \ = \ 1 - p_1 - p_2, \quad (p_1, p_2 > 0).$$

Es sei $N := \min\{n > 0 | S_n = \infty\}$.

- **a)** Sind N bzw. $N^* := N - 1$ Stoppzeiten?
- **b)** Man zeige $\mathbf{P}[N < \infty] = 1$,
- **c)** bestimme die gemeinsame Verteilung von (N^*, S_{N^*}),
- **d)** und die Erwartung $\mathbb{E}S_{N^*}$.

30) Für den Galton-Watson Prozess Z_n mit Mittel $m = 1$ und Varianz σ^2 der Nachkommenverteilung σ^2 zeige man

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbf{P}(Z_n > 0) \ = \ \frac{2}{\sigma^2}$$

31) Man zeige, dass jede Mischung von (um 0) symmetrischen, unabhängigen Verteilungen X_i

$$Y \ = \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ X_i$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ symmetrisch ist. Gilt dies auch für $Y \ = \ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\ X_i$ bei einer unabhängigen Folge und existierendem Grenzwert ?