Grundlagen der Physik 1
Lösung zu Übungsblatt 11

Daniel Weiss

28. Februar 2010

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

Die durch das Rohr fließende Wassermenge in einer bestimmten Zeit, I, ist konstant (Kontinuitätsgleichung). Es gilt also:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \tag{2}$$

Der Druckunterschied in den beiden verschiedenen Rohrteilen lässt sich über den Unterschied der darüber stehenden Flüssigkeitssäule bestimmten.

$$\Delta p = \rho g \Delta h \tag{3}$$

Die Bernoullische Gleichung liefert die Geschwindigkeits-Druck-Beziehung:

$$\begin{aligned} p + \frac{1}{2}\rho v^2 &= p_0 && (4)\\ \Delta p + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) &= 0 \end{aligned}$$

Mit Gleichung 2:

$$\begin{aligned} \Delta p + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_1^2}{A_2^2}v_1^2 - v_1^2\right) &= 0\\ \Leftrightarrow v_1 &= \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(1-\frac{A_1^2}{A_2^2}\right)}} = 2{,}29\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} && (5) \end{aligned}$$

Der Durchfluss pro Zeiteinheit ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung:

$$I = A_1 v_1 = 2{,}3\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}} \qquad (6)$$

Aufgabe 2

Das Problem kann dahingehend vereinfacht werden, dass die erste - weiter oben liegende - Öffnung ignoriert wird und nur die untere Öffnung bei einer Fasshöhe von $h2$ angenommen wird. Das darüber liegende Wasser wirkt aufgrund der linearen Druckzunahme eines inkompressiblen Fluids auf den Druck an beiden Öffnungen auf gleiche Weise.

Der Druck auf der Höhe der nunmehr einzigen Öffnung beträgt:

$$p_2 = \rho g(h_2 - h_1) \qquad (7)$$

Die Bernoulli-Gleichung - mit Index 2 für den Zustand kurz außerhalb des Fasses und Index 1 für vor der Öffnung - für die Öffnung ist:

$$\begin{aligned} p_2 + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v_2^2}_{=0} &= \underbrace{p_1}_{=0} + \frac{1}{2}\rho v_1^2\\ \rho g(h_2 - h_1) &= \frac{1}{2}\rho v_1^2\\ v_1 &= \sqrt{2g(h_2 - h_1)} && (8) \end{aligned}$$

Die Kraft, die das ausströmende Wasser auf den Behälter ausübt entspricht vom Betrag der (in positiver x-Richtung wirkenden) Gegenkraft.

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt}v_1 = \rho\frac{dV}{dt}v_1 = \rho A\frac{dt}{dt}v_1^2 = 2\rho Ag(h_2 - h_1) = 4{,}9\mathrm{N} \qquad (9)$$

Aufgabe 3

a) Die Strömgeschwindigkeit ergibt sich direkt aus der Durchflussmenge I:

$$I = \frac{V_1}{t} = \frac{A_1 v_1 t}{t} = A_1 v_1 \tag{10}$$

Daraus folgt:

$$v_1 = \frac{I}{A_1} = \frac{2{,}0\text{m}^3}{60\text{s} \cdot 10^{-2}\text{m}^2} = 3{,}3\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{11}$$

b) Bernoulli:

$$\rho_w g h_1 + \frac{1}{2}\rho_l v_1^2 = \rho_w g h_2 + \frac{1}{2}\rho_l v_2^2 \tag{12}$$

Hier wird vorausgesetzt, dass sich die Dichte der Luft nicht ändert - die Luft wurde also als ideales Gas angenommen. Aus Aufgabe a) folgt die Beziehung:

$$v_2^2 = \frac{I^2}{A_2^2} \tag{13}$$

Mit Gleichung 12 lässt sich nun die Höhendifferenz der Flüssigkeitssäule berechnen:

$$\begin{aligned} \rho_w g \Delta h &= \frac{1}{2}\rho_l \left(\frac{I^2}{A_2^2} - v_1^2 \right) \\ \Leftrightarrow \Delta h &= \frac{1}{2}\frac{\rho_l}{\rho_w}\frac{\frac{I^2}{A_2^2} - v_1^2}{g} = 1{,}77 \cdot 10^{-2}\text{m} \end{aligned} \tag{14}$$

Aufgabe 4

Bei dieser Aufgabe bekomme ich einen anderen Zahlenwert für die Ergebnisse als in der Lösung angegeben. Dieselbe Aufgabe wird auch im Demtröder auf S. 459 (9. Kapitel, 1. Aufgabe) gerechnet und ergibt dort wieder einen anderen Wert. Ich weiß nicht was ich falsch habe. Also, wers weiß bitte melden. Hier meine Rechnung:

Nach Hagen-Poiseuille gilt:

$$I = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4 (p_2 - p_1)}{8\eta L} = 8{,}52 \cdot 10^{-4}\frac{\text{m}^3}{\text{s}} = S_v \tag{15}$$

Die Saugleistung ist dann:

$$S_l = p \cdot S_v = \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot S_v = 4{,}26 \cdot 10\frac{\text{Pam}^3}{\text{s}} \tag{16}$$

Aufgabe 5

a) Aus der allgemeinen Gasgleichug:

$$pv = Nk_BT \tag{17}$$
$$\Leftrightarrow p = nk_BT$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{p}{k_BT} = 2{,}42 \cdot 10^{17}\frac{1}{\mathrm{m}^3} \tag{18}$$

Annahme: Der Behälter sei mit Stickstoff gefüllt ($r = 155$pm).

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} = 9{,}68\mathrm{m} \tag{19}$$

Für die Stoßzeit benötigen wir die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen. Diese bekommt man aus der Energie (Annahme: ideales Gas, nur kinetische Energie vorhanden):

$$U = \frac{3}{2}Nk_BT = \frac{1}{2}m\overline{v}^2 \tag{20}$$
$$\overline{v} = \sqrt{\frac{3Nk_BT}{m}} =$$
$$= \sqrt{\frac{3pV}{m}} =$$
$$= \sqrt{\frac{3pVN_Ak_BT}{MpV}} =$$
$$= \sqrt{\frac{3N_Ak_BT}{M}} =$$
$$= 5{,}17 \cdot 10^2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{21}$$

Hierbei wurde verwendet, dass $m = \frac{M}{N_A} \cdot N = \frac{MpV}{N_Ak_BT}$.

$$\Rightarrow \tau = \frac{\Lambda}{\overline{v}} = 18{,}73\mathrm{ms} \tag{22}$$

b Die Teilchenflussdichte der auf die Wand treffenden Teilchen ist:

$$\Phi = \frac{1}{4}n\overline{v} = \frac{Z_w}{At} \Rightarrow Z_w(t) = \frac{1}{4}n\overline{v}At \tag{23}$$

Zwischen den Teilchen selbst:

$$\Lambda = \overline{v}\tau = \overline{v}\frac{t}{Z(t)} \Rightarrow Z(t) = \frac{\overline{v}t}{\Lambda} \tag{24}$$

Also ist deren Verhältnis:

$$\frac{Z(t)}{Z_w(t)} = \frac{\overline{v}t}{\Lambda\frac{1}{4}n\overline{v}At} = \frac{4}{\Lambda n} = 17 \cdot 10^{-19} \tag{25}$$

c) Ergibt sich aus Multiplizieren der Teilchenanzahl mit der von einem einzigen Teilchen zurückgelegten Strecke während einer Sekunde (mittlere Strecke).

$$N \cdot \overline{v} \cdot 1\text{s} = \frac{pV}{k_b T} \cdot \overline{v} \cdot 1\text{s} = 4{,}995 \cdot 10^{19}\text{m} \tag{26}$$

Aufgabe 6

Die Flussdichte der auf die Wand treffenden Teilchen ist:

$$\Phi = \frac{Z}{At} = \frac{1}{4} n\overline{v} \Rightarrow t = \frac{4Z}{nA\overline{v}} \tag{27}$$

Wir möchten wissen, wann die Wand komplett bedeckt ist. Also wann an der Wand N Moleküle "kleben". Das ist genau dann der Fall, wenn $N = Z$. Weiterhin ist:

$$N = \frac{A_{\text{gesamt}}}{A_{\text{Molekül}}} = \frac{A_g}{A_0} \tag{28}$$

Mit den Gleichungen 18 und 21 folgt:

$$\frac{4}{A_0 \cdot \frac{p}{k_B T} \cdot \sqrt{\frac{3 N_A k_B T}{M}}} = 114\text{s} \tag{29}$$

Dabei wurde eine Temperatur von 300 Kelvin angenommen.