Grundlagen der Physik 1
Lösung zu Übungsblatt 12

Daniel Weiss

3. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

Im Folgenden rechne ich unter der Annahme, dass jeweils die neutrale Faser in beiden Materialien sich so ausdehnt, wie es der ganze Streifen ohne die Zwangsbedingung (Biegung) tun würde. Damit komme ich auf ein etwas anderes Ergebnis als in der Angabe.
Dort wurde so gerechnet, dass die äußere Kante des sich stärker ausdehnenden Materials und innere Kante des sich schwächer Ausdehnenden "ungehindert" ausdehnen - was jedoch falsch ist. Beim Biegen behält nur die neutrale Faser ihre Länge!
Wenn in meiner Schlussformel $\frac{d}{2}$ durch d ersetzt wird, dann stimmt es mit dem (falschen) Ergebnis in der Angabe überein.

Wenn der Radius bis zur Grenzfläche der beiden Materialien (siehe Skizze) geht, dann gilt für die Länge der beiden neutralen Fasern:

$$l_1 = \phi\left(r - \frac{d}{2}\right) \tag{1}$$

$$l_2 = \phi\left(r + \frac{d}{2}\right) \tag{2}$$

Auflösen nach ϕ und Gleichsetzen liefert die Beziehung:

$$\frac{l_0(1+\alpha_1\Delta T)}{r-\frac{d}{2}} = \frac{l_0(1+\alpha_2\Delta T)}{r+\frac{d}{2}} \tag{3}$$

Hierbei wurde die Gleichung für die lineare Ausdehnung

$$\alpha := \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial T} \Rightarrow l = l_0(1+\alpha\Delta T) \tag{4}$$

benutzt. Auflösen der Gleichung 3 nach r ergibt:

$$r = \frac{d}{2}\cdot\frac{l_1+l_2}{l_2-l_1} = \frac{d}{2}\cdot\frac{2+\Delta T(\alpha_1+\alpha_2)}{\Delta T(\alpha_2-\alpha_1)} \tag{5}$$

Mit der Winkelbeziehung

$$\cos(\phi) = \frac{r-a}{r} \tag{6}$$

kann nun ϕ bestimmt werden. Das wiederum eingesetzt in Gleichung 2 gibt die Länge der neutralen Faser des zweiten Streifens. Damit kann nun mit Gleichung 4 die Anfangslänge berechnet werden. Als endgültige Formel lässt sich daher schreiben

$$l_0 = \frac{\arccos\left(1-\frac{a}{\frac{d}{2}\cdot\frac{2+\Delta T(\alpha_1+\alpha_2)}{\Delta T(\alpha_2-\alpha_1)}}\right)\left(\frac{d}{2}\cdot\frac{2+\Delta T(\alpha_1+\alpha_2)}{\Delta T(\alpha_2-\alpha_1)}+\frac{d}{2}\right)}{1+\alpha_2\Delta T} = 3{,}53\mathrm{cm} \tag{7}$$

Ersetzt man alle $\frac{d}{2}$ durch d, so ergeben sich die 5cm aus der Angabe. Diese Rechnung ist jedoch falsch.

Aufgabe 2

a) Für das Elastizitätsmodul gilt:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \Rightarrow \sigma = \epsilon E = \frac{\Delta l}{l_0}E \tag{8}$$

Dabei ist ϵ die Dehnung des Materials und $\sigma = \frac{F}{A}$ die Spannung. Für den Ring mit Radius r im kalten Zustand soll maximal eine Spannung von $0{,}3\epsilon_\mathrm{B}$ herrschen.

$$\begin{aligned} 0{,}3\sigma_\mathrm{B} &= \frac{2\pi\cdot 20\mathrm{mm}-2\pi r}{2\pi\cdot 20\mathrm{mm}}E = \\ &= \left(1-\frac{r}{20\mathrm{mm}}\right)E \qquad (9) \\ \Rightarrow r &= \left(1-\frac{0{,}3\sigma_\mathrm{B}}{E}\right)\cdot 20\mathrm{mm} = 1{,}998\mathrm{cm} \Rightarrow d = 2r = 3{,}996\mathrm{cm} \qquad (10) \end{aligned}$$

b) Für die lineare Ausdehnung mit steigender Temperatur gilt:

$$l_1 = l_0(1 + \alpha\Delta T) \tag{11}$$

Mit dem in a) berechneten Radius für den kalten Ring lässt sich die nötige Temperaturdifferenz bestimmen.

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{\Delta l}{\alpha l_0} = \frac{2\pi \cdot 20\text{mm}}{\alpha \cdot 2\pi \cdot 1{,}998\text{cm}} - \frac{1}{\alpha} = 83\text{K} \tag{12}$$

Aufgabe 3

Das Trägheitsmoment einer homogenen Eisenstange ist

$$I = \int_\text{V} a^2 dm = \rho \int_\text{V} a^2 dV = \rho \int_0^x \int_0^y \int_0^l a^2 \,\text{da}\,\text{dy}\,\text{dx} = \frac{1}{3}\rho x y l^3 = \frac{1}{3} m l^2 \tag{13}$$

Die Ausdehnung der Stange bei einer Temperaturdifferenz von 92K ist

$$l_1 = l_0(1 + \alpha\Delta T) \tag{14}$$

Daraus folgt die Änderung des Trägheitsmoments

$$\Delta I = I_1 - I_0 = \frac{1}{3} m l_0^2 \left[(1 + \alpha\Delta T)^2 - 1\right] = 2{,}2 \cdot 10^3 \text{kgm}^2 \tag{15}$$

Aufgabe 4

Das Glasgefäß dehnt sich aus.

$$\Delta V_\text{Glas} = V_0 \gamma_\text{Glas} \Delta T = 3 V_0 \alpha_\text{Glas} \Delta T \tag{16}$$

Das Quecksilber dehnt sich jedoch stärker aus, deshalb fließt etwas davon aus dem Gefäß. Über die Massendifferenz des Quecksilbers kann das verlorengegangene Volumen berechnet werden.

$$\Delta V_\text{Hg} = \frac{\Delta M_\text{Hg}}{\rho_\text{Hg}} \tag{17}$$

Die hier eingesetzte Dichte entspricht derjenigen von Quecksilber bei 40°C. Die Gesamtvolumensänderung des Quecksilbers entspricht dann der Summe dieser beiden Volumensänderungen.

$$\Delta V = \Delta V_\text{Glas} + \Delta V_\text{Hg} \tag{18}$$

Der Volumenausdehnungskoeffizient ist folgendermaßen definiert:

$$\gamma_\text{Hg} := \frac{1}{V_0}\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{1}{V_0}\left(\frac{M_\text{Hg,0} - M_\text{Hg,1}}{\Delta T \rho_\text{Hg}} + \frac{3 V_0 \alpha_\text{Glas} \Delta T}{\Delta T}\right) \tag{19}$$

Das Volumen des Gefäßes V_0 kann über die Masse des nach der Ausdehnung verbleibenden Quecksilbers und der Dichte des Quecksilbers bei 40°C bestimmt werden.

$$V_0 = \frac{M_{\mathrm{Hg},1}}{\rho_{\mathrm{Hg}}} \tag{20}$$

Daraus folgt für Gleichung 19:

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathrm{Hg}} &= \frac{\rho_{\mathrm{Hg}}}{M_{\mathrm{Hg},1}} \frac{M_{\mathrm{Hg},0} - M_{\mathrm{Hg},1} + 3M_{\mathrm{Hg},1}\alpha_{\mathrm{Glas}}\Delta T}{\Delta T \rho_{\mathrm{Hg}}} = \\ &= \frac{1}{M_{\mathrm{Hg},1}} \frac{M_{\mathrm{Hg},0} - M_{\mathrm{Hg},1} + 3M_{\mathrm{Hg},1}\alpha_{\mathrm{Glas}}\Delta T}{\Delta T} = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\frac{1}{\mathrm{K}}\end{aligned} \tag{21}$$

Aufgabe 5

Für den Wärmestrom gilt

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \tag{22}$$

Unter der Annahme, dass homogenes Material für die Wand, Putz und Heraklithplatte verwendet wurde gilt

$$\frac{dQ}{dt} = -A\frac{\lambda}{x}\Delta T = -Ak\Delta T \tag{23}$$

Der k-Wert ist ein Maß für die Wärmeisolation. Bei mehreren aneinander grenzenden Materialien wird er reziprok addiert.

$$\frac{1}{k_1} = \frac{d_1}{\lambda_{\mathrm{Ziegel}}} + \frac{2d_2}{\lambda_{\mathrm{Putz}}} \tag{24}$$

$$\frac{1}{k_2} = \frac{38\mathrm{cm}}{\lambda_{\mathrm{Ziegel}}} + \frac{2d_2}{\lambda_{\mathrm{Putz}}} + \frac{d_3}{\lambda_{\mathrm{Heraklith}}} \tag{25}$$

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_2} \Rightarrow d_3 = \left(\frac{38\mathrm{cm} - d_1}{\lambda_{\mathrm{Ziegel}}}\right)\lambda_{\mathrm{Heraklith}} = 3{,}6\mathrm{cm} \tag{26}$$

Aufgabe 6

a) Reziprokes addieren der k-Weter und κ-Werte ergibt den Gesamtwärmeübergangskoeffizienten.

$$\frac{1}{k} = \frac{2d_1}{\lambda_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{\kappa_{\mathrm{i}}} + \frac{1}{\kappa \mathrm{a}} \tag{27}$$

Damit kann die Verlustleistung - die der gesuchten Heizleistung entspricht - berechnet werden.

$$\frac{dQ}{dt} = Ak\Delta T = 215\mathrm{W} \tag{28}$$

b) Die Rechnung von a) vereinfacht sich dahingehen, dass der Spalt herausfällt und die Scheibe dicker ist.

$$\frac{1}{k} = \frac{d_3}{\lambda_1} + \frac{1}{\kappa_\mathrm{i}} + \frac{1}{\kappa \mathrm{a}} \tag{29}$$

Daraus folgt analog zu a) die Heizleistung

$$P' = 507\mathrm{W} \tag{30}$$