# Grundlagen der Physik 1
# Lösung zu Übungsblatt 1

Daniel Weiss

16. Oktober 2009

## Aufgabe 1

Angaben:

- Geschwindigkeiten von Peter und Rolf: $v_0 = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- Breite des Flusses: $b = 100\mathrm{m}$
- Fließgeschwindigkeit des Wassers: $v_F = 80\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} = 0{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Alle anderen Angaben werden nicht benötigt.

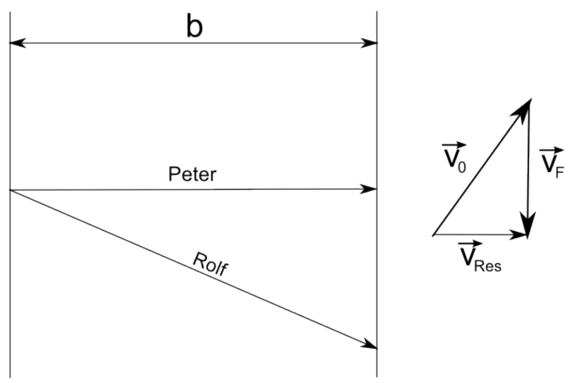



Abbildung 1: Skizze zu Aufgabe 1

a) Da Peter auf selber Höhe am anderen Ufer ankommen möchte, muss er schräg gegen die Flussrichtung anschwimmen. Allgemein lässt sich aus dem Kräftedreieck die Geschwindigkeit senkrecht zum Ufer ($v_{Res}$) für Peter wie folgt berechnen:

$$v_{Res} = \sqrt{v_0^2 - v_F^2} < v_0 \qquad \forall v_F > 0. \tag{1}$$

Da nun Rolf direkt zum anderen Ufer schwimmt ist seine Geschwindigkeit senkrecht zum Ufer genau $v_0$. Aus Gleichung 1 folgt direkt, dass Rolf vor Peter am anderen Ufer ankommen wird.

Die Bewegungskomponente in Flussrichtung beeinflusst also Peters Schwimmzeit. Damit Peter am anderen Ufer ankommt muss gelten: $v_F < v_0$, sonst verschwindet die Realkomponente von Gleichung 1 und die Aufgabe macht keinen Sinn mehr.

b) Es handelt sich um Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Die Schwimmzeit lässt sich also folgendermaßen berechnen:

$$v = \frac{s}{t} \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \frac{s}{v}. \tag{2}$$

Daraus ergeben sich die Schwimmzeiten für Peter (unter Berücksichtigung von Gleichung 1) und Rolf mit $s = b$:

$$t_{Peter} = \frac{b}{v_{Res}} = \frac{b}{\sqrt{v_0^2 - v_F^2}} = \frac{100\text{m}}{\sqrt{1\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 0{,}64\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}} = 166,7\text{s} \tag{3}$$

$$t_{Rolf} = \frac{b}{v_0} = \frac{100\text{m}}{1\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 100\text{s} \tag{4}$$

## Aufgabe 2

Gegeben ist folgender Vektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) $\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}74$

b) Allgemein ist die Projektion eines Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$ das Skalarprodukt beider dividiert durch den Betrag von $\vec{b}$. Denn sei $\vec{c}$ die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ und $\phi$ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Dann ist: $\|\vec{c}\|_2 = \|\vec{a}\|_2 \cdot cos(\phi) \Rightarrow \|\vec{c}\|_2 = \vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|_2}$. Die Projektion auf den Vektor mit denselben x- und y-Koordinaten, der aber in der x-y-Ebene liegt liefert das gewünschte Ergebnis: $\|\vec{c}\|_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+1^2+0^2}} = \frac{3*3+1*1+2*0}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$. Anschaulich kann man sich natürlich auch überlegen, dass in diesem Fall die Projektion der Betrag des Vektors $\vec{a}$ ohne die z-Komponente ist.

c) Hier gibt es zwei Ansätze. Zum einen gilt für jeden Vektor $\vec{b}$, der in der x-y-Ebene liegt und senkrecht zu $\vec{a}$ ist: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ folgt daraus ein Gleichungssystem aus einer Gleichung mit drei Unbekannten: $3b_x + b_y + 2b_z = 0$. Das bedeutet, dass zwei Variablen nach Belieben gewählt werden können. Da der Vektor in der x-y-Ebene liegen soll ist nur: $b_z := 0$ sinnvoll. Um einen ganzzahligen Vektor zu bekommen wähle: $b_x := 1 \Rightarrow b_y = -3$. Das liefert als Ergebnis: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) aus Vektor $\vec{a}$ und dem Vektor der durch seine Projektion auf die x-y-Ebene entsteht zu bilden. Dies liefert uns einen Vektor, der zu beiden orthogonal ist und in der x-y-Ebene liegt: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) $\hat{b} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|_2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+9}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 3 = 6$

f) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 3

Angaben:

- $d = 40\text{m}$
- $l = 25\text{m}$
- $v_{LKW} = 80\frac{\text{km}}{\text{h}} = 22{,}\overline{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}$
- $a = 1{,}3\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $v_{max} = 100\frac{\text{km}}{\text{h}} = 27{,}\overline{7}\frac{\text{m}}{\text{s}}$

a) Kurze Abschätzung. Nehme an die Beschleunigung sei instantan - also $a = \infty$. Es gilt weiterhin:

$$v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v} \tag{5}$$

Für den erfolgreichen Überholvorgang muss gelten: $t_{LKW} > t_{Auto}$. Wobei ersteres sich auf die Zeit bezieht, die der LKW braucht um die verfügbaren 300m zurückzulegen und letzteres auf die Zeit, in der das Auto relativ zum LKW die $l + 2 \cdot d = 105\text{m}$ zurücklegt. Daraus ergibt sich die Abschätzung:

$$t_{LKW} > t_{Auto} \Leftrightarrow \frac{300\text{m}}{80\frac{\text{km}}{\text{h}}} > \frac{105\text{m}}{20\frac{\text{km}}{\text{h}}} \Leftrightarrow \frac{300\text{m}}{105\text{m}} > \frac{80\frac{\text{km}}{\text{h}}}{20\frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 3 > 4 \qquad ⚡ \tag{6}$$

D.h. der Platz reicht nicht zum überholen.

b) Betrachte den LKW als ruhend und berechne zum Einen die Zeit, die das Auto zum Beschleunigen benötigt und dann die Zeit, die es mit konstanter Geschwindigkeit überholt - bis der Überholvorgang abgeschlossen ist.
Überholweg:

$$s_{ueberholen} = l + 2 \cdot d \tag{7}$$

Dauer der Beschleunigung von 0 auf $20\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 5{,}\overline{5}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$:

$$v_{ueberholen} = a \cdot t_B \Leftrightarrow t_B = \frac{v_{ueberholen}}{a} \tag{8}$$

Das Auto legt demnach während der Beschleunigungsphase in Relation zum LKW folgende Strecke zurück:

$$s_B = \frac{1}{2}at_B^2 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{v_{ueberholen}^2}{a^2} = \frac{1}{2}\frac{v_{ueberholen}^2}{a} \tag{9}$$

Restliche Strecke, die mit konstanter Geschwindigkeit gefahren wird:

$$s_{rest} = s_{ueberholen} - s_B = l + 2 \cdot d - s_B \tag{10}$$

Die Dauer für diese Reststrecke ergibt sich dann durch:

$$v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v} \Rightarrow t_{rest} = \frac{s_{rest}}{v_{ueberholen}} = \frac{l + 2 \cdot d - s_B}{v_{ueberholen}} \tag{11}$$

Somit können wir die Gesamtdauer des Überholvorganges bestimmen.

$$t_{ges} = t_B + t_{rest} = \frac{v_{ueberholen}}{a} + \frac{l + 2 \cdot d - \frac{v_{ueberholen}^2}{2a}}{v_{ueberholen}} = \tag{12}$$

$$= \frac{5{,}\overline{5}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} + \frac{25\mathrm{m} + 2 \cdot 40\mathrm{m} - \frac{(5{,}\overline{5})^2\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot 1{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}{5{,}\overline{5}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 21\mathrm{s} \tag{13}$$

Mithilfe der beiden Zeiten $t_B$ und $t_{rest}$ lässt sich nun auch die Gesamtstrecke berechnen, die das Auto im Bezugsystem der Straße zurücklegt. Dazu wendet man die Galilei-Transformation auf $s_B$ und $s_{ueberholen}$ an und bekommt als Strecke:

$$\begin{aligned} s_{ges} &= \underbrace{\frac{1}{2}at_B^2 + v_{LKW} \cdot t_B}_{\text{Beschleunigung}} + \underbrace{v_{max} \cdot t_{rest}}_{Bew. mit konst. Geschw.} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \left(\frac{5{,}\overline{5}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\right)^2 + 22{,}\overline{2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{5{,}\overline{5}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} + \\ &+ 27{,}\overline{7}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{25\mathrm{m} + 2 \cdot 40\mathrm{m} - \frac{(5{,}\overline{5})^2\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot 1{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}{5{,}\overline{5}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \\ &= 573\mathrm{m} \end{aligned} \tag{14}$$

c)

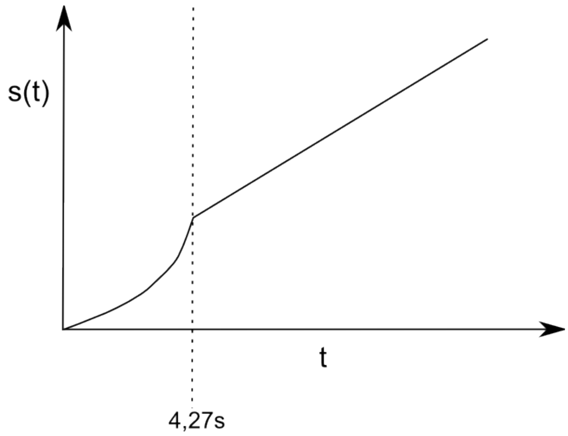



Abbildung 2: Streckendiagramm

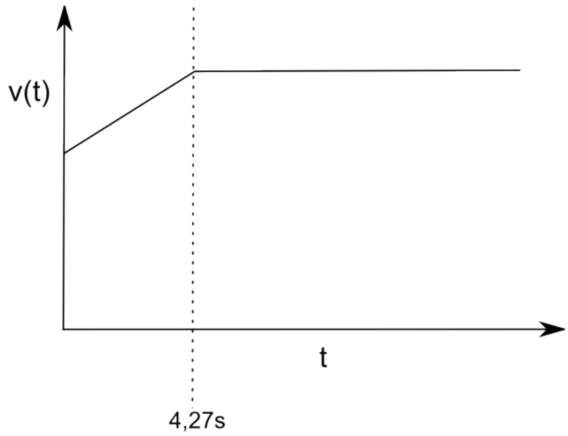



Abbildung 3: Geschwindigkeitsdiagramm

## Aufgabe 4

Angaben:

- $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\vec{r}_1(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{r}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

a) Den Ort erhalten wir analog zu $s = v \cdot t + s_0$ mit:

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\Rightarrow \vec{d}(t) := (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

b) In Gleichung 17 wurde bereits eine Formel zum Berechnen des Abstandes beider Schiffe zum Zeitpunkt $t$ aufgestellt. Das Minimum des Betrags von $\vec{d}(t)$ liefert uns demnach den gesuchten Wert für t, wenn beide Schiffe sich am nächsten sind.

$$\begin{aligned} \|\vec{d}(t)\|_2 &= \sqrt{(-2t+3)^2 + (3t-3)^2} = \sqrt{4t^2 - 12t + 9 + 9t + 9t^2 - 18t + 9} = \\ &= \sqrt{13t^2 - 30t + 18} \end{aligned} \tag{18}$$

Diese Gleichung muss nun zur Bestimmung des Punktes mit dem geringsten Abstand, also dem Minimum von $\vec{d}(t)$, Ableiten und dann 0 setzen. Dazu noch einige Vorbemerkungen. Die Wurzel verändert den t-Wert des Minimums nicht, wie man sich leicht überlegen kann, solange die darunter stehende Funktion größer ist als $0 \forall t \in \mathbb{R}$. Daher können wir die Wurzel weglassen und mit $\vec{d}^2(t)$ weiterrechnen, was einfacher ist. Weiterhin hat die Funktion genau einen Extrempunkt und das muss ein Minimum sein, das folgt aus der Art der Aufgabe. Es reicht also die Nullstelle (es kann nur eine geben) der Ableitung zu bestimmen und das muss das gesuchte t sein. Mathematisch nicht ganz korrekt aber physikalisch zwingend richtig.

$$\begin{aligned} (\|\vec{d}\|_2^2)' &= (13t^2 - 30t + 18)' = \\ &\text{Betrag kann auf der rechten Seite vernachlässigt werden} \\ &\text{wegen obiger Überlegungen} \\ &= 26t - 30 \end{aligned} \tag{19}$$

$$(\|\vec{d}(t)\|_2^2)' = 0 \Rightarrow t = \frac{30}{26} = \frac{15}{13} \approx 1{,}15\text{h} \tag{20}$$

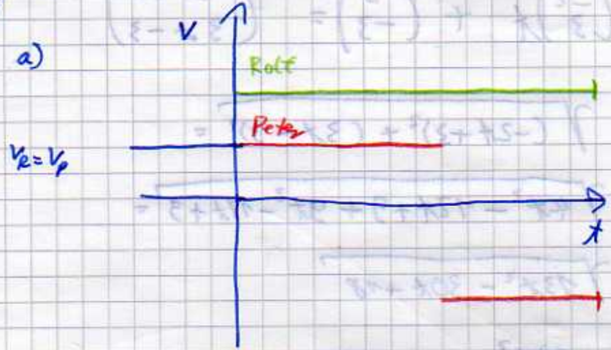
$$\Rightarrow \vec{d}(\frac{15}{13}) = \begin{pmatrix} 0{,}69\text{nm} \\ 0{,}46\text{nm} \end{pmatrix} \tag{21}$$

Die letzte Gleichung liefert uns den Relativabstand der beiden Schiffe, wenn sie sich am nächsten sind. Da Schiff 1 sich auf der x-Achse und Schiff 2 auf der y-Achse bewegen, ist zugleich der x-Wert dieses Relativabstandes die Position (mit y=0) von die Schiff 1 und die y-Komponente (mit x=0) von Schiff 2. Die verstrichene Zeit liegt bei ca. 1,15 =1h 9min.

c) $\|\vec{d}\|_2(\frac{15}{13}) \approx 0{,}83\text{nm}$, also wird der Sicherheitsabstand unterschritten.

⑤

a)




$\mathrm{I} \; \{ V_{P_0} = V_{R_0}$

$\mathrm{II} \; \begin{cases} V_{R_1} = V_{R_0} + V_L \\ V_{P_1} = V_{P_0} \end{cases}$

$\mathrm{III} \; \begin{cases} V_{R_2} = V_{R_1} \\ V_{P_2} = +2 V_{P_1} \end{cases}$ (nur Beträge)

Bezugssystem 1: Boden
Bezugssystem 2: mit Laufband bewegt
Bezugssystem 3: mit Peter bewegt
— u — 4: mit RoCf bewegt

b)

$t_1 = \frac{\Delta P_1}{V_{P_1}}$

$\mathrm{II}: \quad V_{P_1} = \frac{\Delta P_1}{t_1} \Leftrightarrow \Delta P_1 = V_{P_1} \cdot t_1$ Hinweg Peter

$\mathrm{III}: \quad \cancel{V_{P_2} = \Delta P} \quad t_2 = \frac{\Delta P_1}{V_{P_2}}$ Rückweg — " —

RoCf: $\mathrm{II} \,\&\, \mathrm{III}: \quad t_{ges} = \frac{L}{V_{R_0} + V_L}$

$t_{ges} = t_1 + t_2 \Leftrightarrow t_1 = t_{ges} - t_2$

$\cancel{\Rightarrow \Delta P_1 = V_{P_1} \cdot \left( \frac{L}{V_{R_0}} - \frac{\Delta P_1}{V_{P_2}} \right)}$

$t_{ges} = \frac{L}{V_{R_0} + V_L} = \frac{\Delta P_1}{V_{P_1}} + \frac{\Delta P_1}{V_{P_2}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\Delta P_1} = \frac{V_{R_0} + V_L}{L V_{P_1}} + \frac{V_{R_0} + V_L}{L V_{P_2}}$

$\Delta P_1 = \frac{1}{\frac{(V_L + V_{R_0}) V_{P_2} + (V_{R_0} + V_L) V_{P_1}}{L V_{P_1} V_{P_2}}} = \boxed{\frac{L V_{P_1} V_{P_2}}{(V_L + V_{R_0})(V_{P_1} + V_{P_2})}} = \frac{L V_{P_1} V_{P_2}}{(V_L + V_{R_0})(V_{P_1} + V_{P_2})}$

$= \frac{L \cdot 2 V_{P_0}^2}{(V_L + V_{R_0}) 3 V_{P_0}} = \frac{2 L V_{P_0}}{(V_L + V_{R_0}) 3}$ (x)

5c) $v_L = v_R$

$(*) \Rightarrow \cancel{\frac{4 v_{P_1} v_{P_2}}{(v_L+v_{R_0})(v_{P_1}+v_{P_2})}} = \frac{2 L v_{P_0}}{(v_L+v_{R_0})3} = \frac{\cancel{2} L \cancel{v_{P_0}}}{\cancel{2 v_{P_0}} \cdot 3} =$

mit $v_{P_0} = v_{R_0}$

$= \boxed{\frac{L}{3}}$

6

$m = 87{,}29\,kg$

$h = 20\,m$

$v_0 = 4\,\frac{m}{s}$

a) $s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + h$ (Nullpunkt am Boden)

Am Boden: $s(t) = 0$

$\Leftrightarrow v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + h = 0$

Mitternachtsformel: $t_{1/2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot h}}{-2 \cdot \frac{1}{2} g} =$

$= \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{-g} = \frac{+4\,\frac{m}{s} \mp \sqrt{16\,\frac{m^2}{s^2} + 2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 20\,m}}{+9{,}81\,\frac{m}{s^2}} =$

Phys. u. Sinnvoll

$\Rightarrow$ ~~$t_1 = +2{,}47\,s$~~ ~~$t_2 = -1{,}65\,s$~~ $\boxed{t_1 = -1{,}65\,s \quad t_2 = +2{,}47\,s}$

Beide Lsg. Da für b nur $v_0 = -v_0$ gesetzt wird und das nur die Lsg. der Mitternachtsformel vertauscht.

$\Rightarrow$ b) siehe Begr. bei a)

$\Rightarrow t = \underline{1{,}65\,s}$