Grundlagen der Physik 1
Lösung zu Übungsblatt 4

Daniel Weiss

3. November 2009

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

Das Problem ist äquivalent zu dem einer kreisförmigen Planetenbewegung, nur dass die Gravitationskraft durch die Coulomb-Kraft ersetzt wird.

a)

$$F_C = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r^2} = -\frac{mv^2}{r} = F_Z \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow v &= \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{rm}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}} \cdot \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}^2}{2 \cdot 10^{-2}\mathrm{m} \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}}} \\ &= 1{,}13 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{2}$$

b)

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} \tag{3}$$

$$E_{\text{pot}} = \int_r^\infty dr \cdot F_C = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r} = -1{,}15 \cdot 10^{-18}\mathrm{J}^{=} - 7{,}2\mathrm{eV} \tag{4}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = 5{,}8 \cdot 10^{-19}\mathrm{J} = 3{,}6\mathrm{eV} \tag{5}$$

c) Die kinetische Energie entspricht der Änderung der potentiellen (Energieerhaltungssatz). Um das Elektron ins "Unendliche" zu bringen, wo die potentielle Energie per Definition 0 ist, müssen also genau $E_{\text{pot}} = -7,2\mathrm{eV}$ aufgebracht werden. Dort ist auch die kinetische Energie 0, d.h. es sind noch $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = -3{,}6\mathrm{eV}$ aufzubringen. Dass der Wert negativ ist bedeutet nichts anderes, als dass die Arbeit dem System zugeführt werden muss.

Aufgabe 2

a) Hier gibt es 2 Möglichkeiten. Entweder über das zweite Keplersche Gesetz oder über das dritte Keplersche Gesetz. Für die Methode mit dem zweiten Keplerschen Gesetz muss allerdings zuerst die Geschwindigkeit berechnet werden, weil der Wert des Drehimpulses benötigt wird.

i) Zunächst mit dem dritten Keplerschen Gesetz:

$$\frac{T_S^2}{T_E^2} = \frac{a_S^3}{a_E^3} \tag{6}$$

$$\Rightarrow T_S = \sqrt{T_E^2 \cdot \frac{a_S^3}{a_E^3}} \tag{7}$$

Die Halbachse der Erde entspricht r_P, da sie sich angenähert auf einer Kreisbahn bewegt. Die Halbachse der Sonde ist $a_S = \frac{1}{2}(r_A + r_P)$

Fehlt also noch die Umlaufzeit der Erde. Da wir von einer Kreisbahn ausgehen, kann diese durch Gleichsetzen der Zentripetalkraft mit der Gravitationskraft berechnet werden

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \tag{8}$$

Mit $v = \frac{2\pi r}{T}$

$$T_E = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} \tag{9}$$

$$\Rightarrow T_S = \sqrt{\frac{4\pi^2 a_S^3}{GM}} = 4{,}48 \cdot 10^7\mathrm{s} \tag{10}$$

Gesucht ist die halbe Umlaufzeit.

$$\frac{1}{2}T_S = 2{,}24 \cdot 10^7\mathrm{s} = 259{,}3\mathrm{d} \tag{11}$$

ii) Für die Methode mit dem 2. Keplerschen Gesetz muss die Aphel- oder Perihelgeschwindigkeit vorher bekannt sein. Wir setzen also die Aufgabe b) als schon gerechnet voraus.

Die Fläche der Bahnellipse ist nun

$$A_E = \pi ab \tag{12}$$

Wobei a die große und b die kleine Halbachse der Ellipse sind. Uns fehlt noch die kleine Halbachse b, welche mit dem Pythagoras berechnet werden kann. Siehe dazu Abbildung 1

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}(r_A - r_P)^2} \tag{13}$$

Nun betrachten wir ein infinitesimal kleines Flächenelement der Ellipse. Siehe dazu Abbildung 2. Es folgt nun mit Kleinwinkelnäherung:

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot ds \tag{14}$$

$$ds = v \cdot dt \tag{15}$$

$$\Rightarrow dA = \frac{1}{2} rv \cdot dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} rv = \dot{A} = \text{ konstant} \tag{16}$$

Die Zeit, die der Fahrstrahl benötigt, um die halbe Fläche der Ellipse zu überstreichen ist dann das gesuchte $\frac{T_S}{2}$

$$\frac{T_S}{2} = \frac{A_E}{2\dot{A}} = \frac{\pi a \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}(r_A - r_P)^2}}{r_A v_A} =$$
$$= 259{,}3\text{d} \tag{17}$$

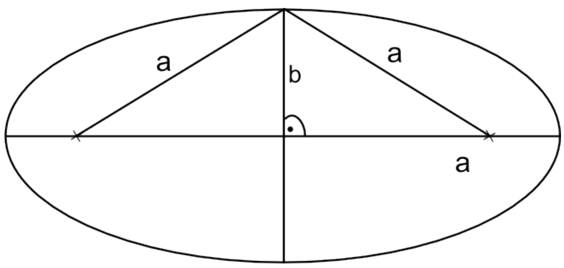

Abbildung 1: Halbachsen in der Ellipse

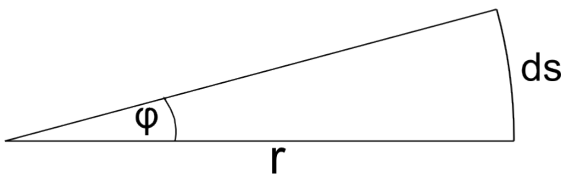

Abbildung 2: Infinitesimales Flächenelement der Ellipse

b) Es gelten die Energieerhaltung und Drehimpulserhaltung:

$$\frac{1}{2}v_A^2 - G\frac{M_S}{r_A} = \frac{1}{2}v_P^2 - G\frac{M_S}{r_P} \tag{18}$$

$$r_A v_A = r_P v_P \tag{19}$$

$$\Rightarrow v_A = \frac{r_P}{r_A}v_P$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{r_P}{r_A}v_P\right)^2 - G\frac{M_S}{r_A} = \frac{1}{2}v_P^2 - G\frac{M_S}{r_P} \tag{20}$$

$$v_P = \sqrt{\frac{GM\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{r_P^2}{r_A^2}}} = 32{,}7\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

$$\Rightarrow v_A = \frac{r_P}{r_A}v_P = 21{,}5\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \tag{21}$$

Die Einschussgeschwindigkeit v_P ist dabei die absolute Geschwindigkeit im Bezugssystem der Sonne. Die Erdgeschwindigkeit von ca. $29{,}7\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ wurde nicht mit verrechnet und die benötigte Geschwindigkeit um das Erdschwerefeld zu verlassen ebenfalls nicht.

Aufgabe 3

Allgemein:

$$\begin{aligned} W &= \int_{(a_x,a_y,a_z)^T}^{(b_x,b_y,b_z)^T} d\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \int_{(a_x,a_y,a_z)^T}^{(b_x,b_y,b_z)^T} \vec{F}\left(\begin{pmatrix} r_\mathrm{x} \\ r_\mathrm{y} \\ r_\mathrm{z} \end{pmatrix}\right)\cdot d\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \int_{a_x}^{b_x} (dx\cdot F_\mathrm{x}(\vec{r})) + \int_{a_y}^{b_y} (dy\cdot F_\mathrm{y}(\vec{r})) + \int_{a_z}^{b_z} (dz\cdot F_\mathrm{z}(\vec{r})) \end{aligned} \tag{22}$$

a)

$$W = \int_0^2 dx\cdot y + \int_0^4 dy\cdot x^2 =$$

Mit $y = 2x$ folgt:

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 dx\cdot 2x + \int_0^4 dy\cdot\frac{1}{4}y^2 = \\ &= 4 + \frac{64}{12} = \frac{28}{3} \end{aligned} \tag{23}$$

b)

$$W = \int_0^2 dx \cdot y + \int_0^4 dy \cdot x^2 =$$

Mit $y = x^2$ folgt:

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 dx \cdot x^2 + \int_0^4 dy \cdot y = \\ &= \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3} \end{aligned} \tag{24}$$

Alternativ kann jeweils auch substituiert werden. Bei b) beispielsweise mit: $\frac{dy}{dx} = 2x$. Das Ergebnis zeigt, dass es sich um ein nicht-konservatives und inhomogenes Kraftfeld handelt.

Aufgabe 4

a) Es wirken im Bezugssystem der Bahn die Gravitationskraft, die senkrecht nach unten gerichtet ist. Diese entspricht auch der Zentripetalkraft. Falls die Gravitationskraft kleiner sein sollte als die benötigte Zentripetalkraft um den Wagen auf der Loopingbahn zu halten, so drückt der Körper aufgrund seiner Massenträgheit gegen den Boden der Bahn. Die Gegenkraft von der Bahn auf den Körper entspricht dann genau der Differenz zwischen Gravitationskraft und nötiger Zentripetalkraft. Die Zentripetalkraft setzt sich also zum einen aus der Schwerkraft und zum anderen aus einer Gegenkraft des Bodens auf den Wagen zusammen. Im System des Wagens gibt es eine Zentrifugalkraft, die durch eine Gegenkraft der Bahn und die Gravitationskraft ausgeglichen wird.

b) Es gilt die Energieerhaltung. Berücksichtige die potentielle und die kinetische Energie. Letztere ist am Startpunkt 0. Außerdem darf im Punkt B die Gravitationskraft nicht größer sein als die benötigte Zentripetalkraft, sonst verliert der Wagen den Kontakt zur Bahn.

$$E_0 = mgH \text{ gehe näherungsweise von einem homogenen Erdschwerefeld aus} \tag{25}$$

$$E_1 = 2mgR + \frac{1}{2}mv^2 \tag{26}$$

$$\Rightarrow v^2 = 2g(H - 2R) \tag{27}$$

Kräftebedingung für "Bodenkontakt" mit der Bahn:

$$F_Z \geq F_G \tag{28}$$

Damit folgt:

$$\frac{mv^2}{R} \geq mg \tag{29}$$

Mit Gleichung 27 ergibt sich

$$\begin{aligned} 2g(H - 2R) &\geq gR \\ \Leftrightarrow H &\geq \frac{gR + 4R)}{2g} = \frac{5R}{2} \end{aligned} \tag{30}$$

c) Falls $h \leq R$, dann rollt der Wagen die Loopingbahn bis maximal zur Höhe R hoch und anschließend rückwärts wieder runter. Es stellt sich dann, da Reibung vernachlässigt wurde, eine Schwingung des Wagens ähnlich einer Pendelschwingung ein.

   Falls $R \leq h \leq H$, dann bewegt sich der Wagen zunächst auf der Loopingbahn, verlässt diese jedoch zwischen R und $2R$ und beschreibt anschließend die Bahnkurve einer Wurfparabel bis er wieder auf der Bahn auftrifft.

Aufgabe 5

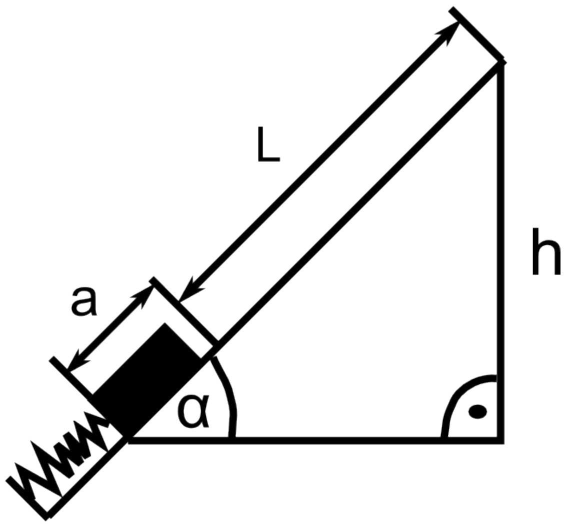

Abbildung 3: Federspielzeug

a)

b) Die Federkraft kann mit dem Hook'schen Gesetz berechnet werden:

$$F_F = -Da \tag{31}$$

Aus Skizze 3 ergibt sich die Beziehung:

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{a+L} \Leftrightarrow h = (a+L)\sin(\alpha) \tag{32}$$

Stelle die Energiegleichungen auf

$$E_0 = \int_a^0 da \cdot F_F = \frac{1}{2}a^2 D \tag{33}$$

$$E_1 = Mgh = Mg(a+L)\sin(\alpha) \tag{34}$$

$$E_0 = E_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}Da^2 = Mg(a+L)\sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow a_{1/2} = \frac{Mg\sin(\alpha) \mp \sqrt{M^2g^2\sin^2(\alpha) + 2DLMg\sin(\alpha)}}{D} \tag{35}$$

c) Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung stellen die zwei Zustände dar, die die Feder einnehmen kann um anschließend den Körper auf den Lichtschalter zu schießen. Also einmal Kontraktion der Feder und einmal Dehnung.

Aufgabe 6

a) Gegeben:

$$v_{m_0} = -5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{36}$$

$$v_{M_0} = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{37}$$

$$v_{m_1} = 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{38}$$

Es gilt die Impulserhaltung:

$$mv_{m_0} + Mv_{M_0} = mv_{m_1} + Mv_{M_1} \tag{39}$$

$$\Leftrightarrow v_{M1} = \frac{m(v_{m_0} - v_{m_1}) + Mv_{M_0}}{M}$$

$$= -1{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{40}$$

b)

$$E_0 = \frac{1}{2}(mv_{m_0}^2 + Mv_{M_0}^2) \tag{41}$$

$$E_1 = \frac{1}{2}(mv_{m_1}^2 + Mv_{M_1}^2) \tag{42}$$

$$\text{Verlust} = 1 - \frac{E_1}{E_0} = 0{,}833 = 83{,}3\% \tag{43}$$

c) Da es sich bei beiden Bezugssystemen um Inertialsysteme handelt, muss die Impulserhaltung in beiden gelten!

d) Analog zu Gleichung 43 ergibt sich der Verlust. Alle Geschwindigkeiten werden hier mit der Galileitransformation in das neue Bezugssystem überführt.

$$\text{Verlust} = 31{,}3\% \tag{44}$$