Grundlagen der Physik 1
Lösung zu Übungsblatt 5

Daniel Weiss

8. November 2009

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

a) Der Strahlenverlauf vom Fixstern auf die Erde ist für beide Bezugssystem in Abbildung 1 skizziert. Aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken ergibt sich mit Pythagoras die Beziehung zwischen den Winkeln θ und θ'.

$$\sin(\theta') = \frac{x}{vt} \tag{1}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{x}{ct} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{v}{c}\sin(\theta') \approx \alpha \tag{3}$$

Im letzten Schritt wurde die Kleinwinkelnäherung angewandt. Da $v << c$ ändert das am Ergebnis kaum etwas. Die größte Winkeländerung α_{max} tritt bei $\theta = \frac{\pi}{2}$ auf. In diesem Fall beträgt die maximale Abweichung des genäherten Ergebnisses vom tatsächlichen (bei $v = 30\frac{\text{km}}{\text{s}}$) $5 \cdot 10^{-7}\%$, was im Vergleich zur Ungenauigkeit der Erdgeschwindigkeit bezüglich S keine Rolle spielt.

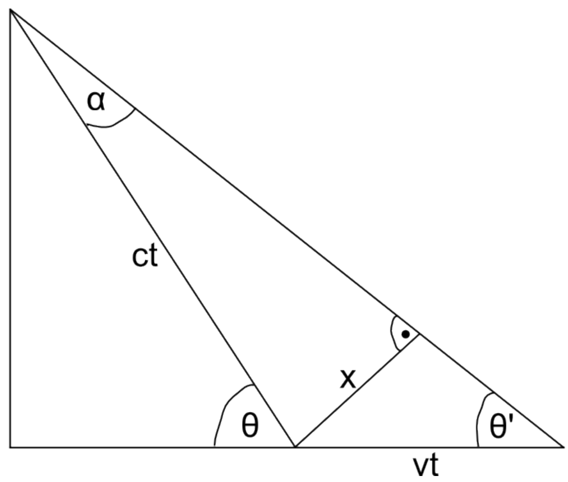

Abbildung 1: Strahlen vom Fixstern

b) Für $\theta = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich $\tan(\alpha) = \frac{vt}{ct}$, wie leicht aus Abbildung 1 ersichtlich wird. Mit der Kleinwinkelnäherung wird das zu

$$\alpha = \frac{v}{c}. \tag{4}$$

Alternativ kann man auch den Winkel θ' in Gleichung 3 auf θ nähern (entspricht der Kleinwinkelnäherung) und erhält dasselbe Ergebnis. Einsetzen der Werte für $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $v = 3 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ liefert eine Abweichung von $\alpha = 5{,}73 \cdot 10^{-}3°$.

Aufgabe 2

Zu berechnen ist die Relativgeschwindigkeit zwischen dem Ampelsystem und dem System, in dem Peter ruht, für die die Frequenzverschiebung durch den Dopplereffekt aus einem roten Ampellicht ein grünes macht. Formel für den relativistischen (longitudinalen) Dopplereffekt:

$$f_{\mathrm{P}} = f_{\mathrm{A}} \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \tag{5}$$

Es müssen also zunächst die Wellenlängen in Frequenzen umgerechnet, und dann Gleichung 5 nach v aufgelöst werden.

$$f = \frac{c}{\lambda} \tag{6}$$

Löse nun nach v auf.

$$\begin{aligned}
\frac{c}{\lambda_\mathrm{P}} &= \frac{c}{\lambda_\mathrm{A}}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \\
\Leftrightarrow \frac{\lambda_\mathrm{A}^2}{\lambda_\mathrm{P}^2} &= \frac{c+v}{c-v} \\
\Leftrightarrow \frac{\lambda_\mathrm{A}^2}{\lambda_\mathrm{P}^2}(c-v) &= c+v \\
\Leftrightarrow \frac{\frac{\lambda_\mathrm{A}^2}{\lambda_\mathrm{P}^2}-1}{1+\frac{\lambda_\mathrm{A}^2}{\lambda_\mathrm{P}^2}} &= \frac{v}{c} \\
\Rightarrow \frac{v}{c} &= 0{,}22 \qquad (7)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Hier kann entweder mit der Lorentzkontraktion der Strecke bis zur Erdoberfläche (Bezugssystem der Myonen) oder mit der Zeitdilatation (Bezugssystem der Erde) gerechnet werden.

Nach t Sekunden sind noch 1% aller Myonen vorhanden. Die vergangene Zeit t ergibt sich aus dem Zerfallsgesetz.

$$n(t) = n(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 0{,}01 \cdot n(0) \qquad (8)$$

$$\Rightarrow t = -\tau \cdot \ln(0{,}01) \qquad (9)$$

Diese im Ruhesystem der Myonen vergangene Zeit transformieren wir nun mithilfe der Lorentztransformation in das Bezugssystem der Erde

$$t' = t\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\tau \cdot \ln(0{,}01) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (10)$$

Die Myonen bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit. Die gesuchte Flugstrecke im System der Erde ist also:

$$s = vt = 0{,}99c \cdot \left(-\tau \cdot \ln(0{,}01) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = 1{,}94 \cdot 10^4 \mathrm{m} \qquad (11)$$

Aufgabe 4

i) Nehmen wir an, dass in einem beliebigen Inertialsystem S zwei Ereignisse E_1 und E_2 mit den Koordinaten $E_1 = (ct_1, x_1, y, z)^T$ und $E_2 = (ct_1, x_2, y_2, z_2)$ gleichzeitig beobachtet werden und dass gilt: $x_2 \neq x_1$. In einem beliebigen anderen Inertialsystem S', welches sich gegenüber S mit der konstanten Geschwindigkeit v in der x-Richtung bewegt (alle Achsen fallen zusammen) haben beide Ereignisse die folgenden Koordinaten (Lorentztransformation). Da uns nur die Gleichzeitigkeit interessiert, transformieren wir nur die Zeitkomponente.

$$t'_1 = \gamma \left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right) \tag{12}$$

$$t'_2 = \gamma \left(t_1 - \frac{vx_2}{c^2}\right) \tag{13}$$

$$t'_1 = t'_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \tag{14}$$

Gleichung 14 ist ein Widerspruch zur Forderung, dass beide Ereignisse im System S räumlich getrennt sind. Daraus folgt, dass aus der Gleichzeitigkeit in einem Inertialsystemen im Allgemeinen nicht die Gleichzeitigkeit in einem anderen folgt.

ii) Abbildung 2 zeigt zwei Lichtstrahlen, die zeitgleich im System S' ausgesandt werden und gleichzeitig von 2 Spiegeln bei A und B reflektiert werden. Zu einem bestimmten Zeitpunkt kommen beide wieder gleichzeitig am Ausgangsort an. Dabei sind die beiden Spiegel vom Aussendeort gleich weit entfernt (im System S'). Für den Beobachter im System S' finden also beide Ereignisse A und B gleichzeitig statt, während für den Beobachter in System S offensichtlich A um die Zeit dt vor B stattfindet.

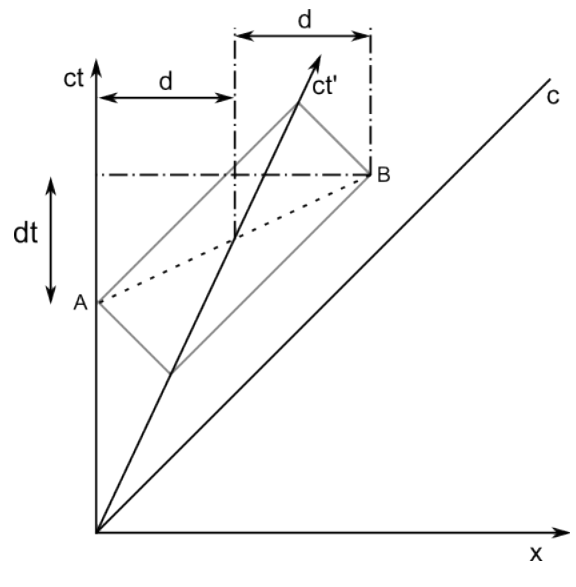

Abbildung 2: Gleichzeitigkeit im Minkowski-Diagramm

Aufgabe 5

Aufgrund der Tatsache, dass es kein ausgezeichnetes Bezugssystem geben kann, ist es egal, ob man vom System des Waggons ausgeht und die sich durch die Lorentztransformation ergebende Zeitdifferenz im Vergleich zum "ruhenden" System berechnet oder umgekehrt. Allerdings muss man, wenn man vom System der Schiene ausgeht die Lorentzkontraktion, also die Verkürzung des Waggons, mitberücksichtigen. Um diesen Aufwand zu sparen, gehe ich von den Zwei Ereignissen A - Lichtstrahl trifft Anfang des Waggons im System des Waggons - und B - Lichtstrahl trifft Ende des Waggons im System des Waggons - aus und transformiere diese in das System der Schiene. Dort setze ich die Differenz der Zeitkoordinaten 0 und erhalte dadurch den zeitlichen Versatz im System des Waggons.

$$t_1 = \gamma\left(t_1' + \frac{vx_1'}{c^2}\right) \tag{15}$$

$$t_2 = \gamma\left(t_2' + \frac{vx_2'}{c^2}\right) \tag{16}$$

Da $t_2 = t_1$ folgt nun

$$\begin{aligned} t_2' + \frac{vx_2'}{c^2} &= t_1' + \frac{vx_1'}{c^2} \\ \Delta t' &= \frac{v}{c^2}(x_1' - x_2') = \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{200}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{299792458^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}(-20\mathrm{m}) = -1{,}24 \cdot 10^{-14}\mathrm{s} = -12{,}4\mathrm{fs} \tag{17}$$

Aufgabe 6

Eines der beiden Postulate der speziellen Relativitätstheorie besagt, dass die Lichtgeschwindigkeit invariant ist. Im speziellen ist c invariant gegenüber der Lorentztransformation. Da nun $v_x'^2 + v_y'^2 = c^2$ muss auch $v_x^2 + v_y^2 = c^2$ gelten, sonst wäre c nicht invariant. Wem diese Begründung nicht ausreicht und es rechnen möchte kommt auf sowas:

Lorentztransformation:

$$x = \gamma(x' + vt') \Rightarrow dx = \gamma(dx' + vdt') \tag{18}$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \Rightarrow dt = \gamma\left(dt' + \frac{vdx'}{c^2}\right) \tag{19}$$

Berechne nun die Summe der Quadrate der Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dx'}{dt'}} \tag{20}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dx'}{dt'}\right)} \tag{21}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dx'}{dt'}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dx'}{dt'}\right)}\right)^2 = c^2 \tag{22}$$