Grundlagen der Physik 1
Lösung zu Übungsblatt 8

Daniel Weiss

1. Dezember 2009

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

a) Die beiden Querkräfte der Seile müssen sich gegenseitig aufheben, da der Balken in Ruhe ist.

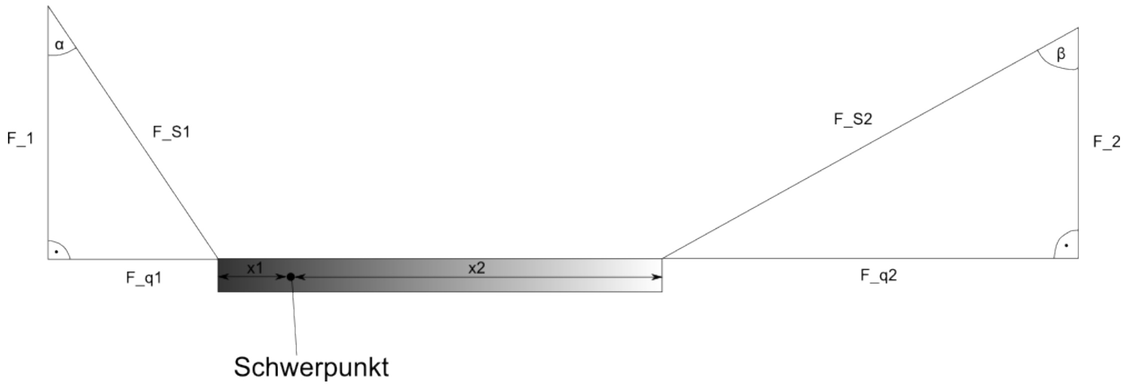

Abbildung 1: Kräfte im hängenden Balken

$$
\begin{aligned}
F_{\text{quer1}} &= F_{\text{quer2}} && (1) \\
\Leftrightarrow F_{\text{Seil1}} \sin(\alpha) &= F_{\text{Seil2}} \sin(\beta) \\
\Leftrightarrow F_{\text{Seil1}} &= \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} F_{\text{Seil2}} && (2)
\end{aligned}
$$

Weiterhin ist der Körper vertikal in Ruhe, also gleichen die Seile die Gewichtskraft aus.

$$
\begin{aligned}
& F_1 + F_2 = F_{\text{G}} = mg && (3) \\
& F_{\text{Seil1}} \cos(\alpha) + F_{\text{Seil2}} \cos(\beta) = mg \\
& \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} \cos(\alpha) F_{\text{Seil2}} + F_{\text{Seil2}} \cos(\beta) = mg \\
& \Rightarrow F_{\text{Seil2}} = \frac{mg}{\frac{\sin(\beta)}{\tan(\alpha)} + \cos(\beta)} = 400\text{N} && (4) \\
& \overset{(2)}{\Rightarrow} F_{\text{Seil1}} = 692\text{N} && (5)
\end{aligned}
$$

b) Die Summe der Drehmomente muss in jedem Punkt 0 sein, da sich der Drehimpuls nicht ändert. Wenn ich aber nun den Schwerpunkt als Ursprung wähle und mir die dann wirkenden Drehmomente anschaue, dann fällt das der Gravitationskraft weg, da diese im Schwerpunkt angreift. Daraus ergibt sich für die einzig verbleibenden Drehmomente (es kommt nur auf die senkrechten Komponenten an):

$$
\begin{aligned}
M_1 &= x_1 F_1 = x_1 F_{\text{Seil1}} \cos(\alpha) && (6) \\
M_2 &= x_2 F_2 = x_2 F_{\text{Seil2}} \cos(\beta) && (7)
\end{aligned}
$$

Diese müssen sich nun gegenseitig aufheben, also im Betrag gleich sein:

$$
\begin{aligned}
& M_1 = M_2 \Rightarrow x_1 F_{\text{Seil1}} \cos(\alpha) = x_2 F_{\text{Seil2}} \cos(\beta) \\
& \Leftrightarrow x_2 = \frac{F_{\text{Seil1}} \cos(\alpha)}{F_{\text{Seil2}} \cos(\beta)} x_1 && (8)
\end{aligned}
$$

Der Balken ist $L = 10$m lang. Also erhalten wir als Bedingung für die Summe von x_1 und x_2:

$$x_1 + x_2 = L \tag{9}$$

Einsetzen von Gleichung 8 führt zu

$$x_1 = \frac{L}{\frac{F_{\text{Seil1}}\cos(\alpha)}{F_{\text{Seil2}}\cos(\beta)} + 1} = 2{,}5\text{m} \tag{10}$$

Aufgabe 2

a) Auf den Balken wirken 3 Drehmomente. Diese sind:

$$M_1 = lm_1 \tag{11}$$
$$M_2 = (l - 3 \cdot 10^{-1}\text{m})m_2 \tag{12}$$
$$M_3 = (L - l)m_3 \tag{13}$$

M_1 und M_2 wirken links von der Unterstützung, M_3 rechts davon. Da der Drehimpuls des Balkens konstant $L = 0$ ist, müssen sich die Drehmomente gegenseitig aufheben. Es gilt also:

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 &= M_3 \\ \Leftrightarrow l(m_1 + m_2) - 3 \cdot 10^{-1}\text{m} \cdot m_2 &= Lm_3 - lm_3 \\ \Leftrightarrow l(m_1 + m_2 + m_3) &= Lm_3 + 3 \cdot 10^{-1}\text{m} \cdot m_2 \\ \Leftrightarrow l &= \frac{Lm_3 + m_2 \cdot 3 \cdot 10^{-1}\text{m}}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= 6{,}55 \cdot 10^{-1}\text{m} = 65{,}5\text{cm} \end{aligned} \tag{14}$$

b) Da das Gewicht des Balkens vernachlässigt werden kann gilt:

$$F_{\text{G}} = (m_1 + m_2 + m_3)g = 1{,}08\text{N} \tag{15}$$

Aufgabe 3

Wähle als Punkte $\vec{a} := \vec{r}_1$ und $\vec{b} := \vec{r}_2$. Dadurch fällt jeweils eines der Drehmomente weg (da bei $\vec{a}$: $\vec{r}_1' = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_1 = \vec{0}$ und analog $\vec{M}_3 = \vec{0}$ bei $\vec{b}$), was die Rechnung ein wenig verkürzt. Im Folgenden werden alle Vektoren auf 3 Dimensionen erweitert - mit der z-Komponente 0.

i) Punkt $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{M}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \cdot F_{23} \tag{16}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{m} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{m} \cdot F_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \mathrm{m} \cdot F_{23} \tag{17}$$

$$\vec{M}_3 = (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot F_{32} \tag{18}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{m} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{m} \cdot F_{32} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} \mathrm{m} \cdot F_{32} \tag{19}$$

Es gilt $F_{23} = F_{32}$, da es sich hier nur um Kraftbeträge handelt. Man sieht sofort, dass

$$\vec{M} = \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = \vec{0} \tag{20}$$

i) Punkt $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ Für den zweiten Punkt ist die Rechnung analog zu oben:

$$\vec{M}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot F_{12} \tag{21}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{m} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{m} \cdot F_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \mathrm{m} \cdot F_{12} \tag{22}$$

$$\vec{M}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot F_{21} \tag{23}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{m} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{m} \cdot F_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} \mathrm{m} \cdot F_{21} \tag{24}$$

Es gilt also auch hier:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{0} \tag{25}$$

Aufgabe 4

a) Skizze mit den Kräften: Siehe Abbildung 2.

b) Offensichtlich muss ein Kräftegleichgewicht herrschen, da die Platte sich nicht bewegt. Da alle Seilkräfte senkrecht nach oben wirken und die Gravitationskraft senkrecht nach unten gilt:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -\vec{F}_\mathrm{G} \tag{26}$$

Wobei F_i die Seilkräfte sind mit $i = 1, 2, 3$ und F_G die Schwerkraft.

c) Hierzu erweitern wir auf drei Dimensionen, da die Fadenkräfte senkrecht zur Ebene der Holzplatte gerichtet sind. Als ersten Schritt berechnen wir den Schwerpunkt der

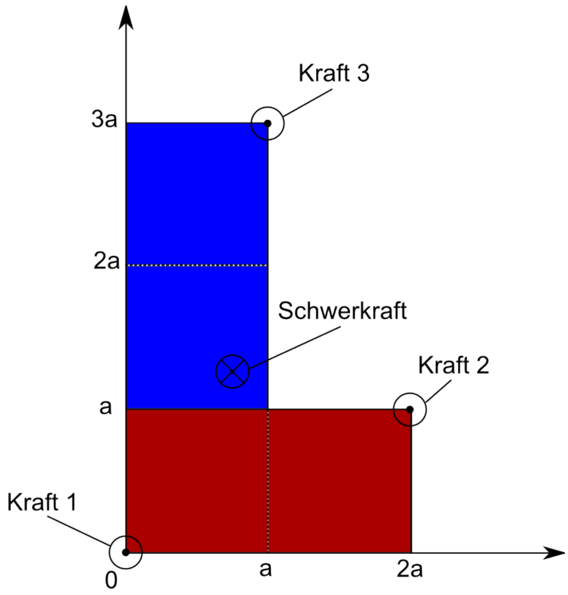

Abbildung 2: Kräfte auf Holzplatte

Holzplatte und anschließend die von allen drei Fadenkräften verursachten Drehmomente bezüglich des Schwerpunktes. Diese müssen in der Summe 0 ergeben, da der Drehimpuls der Platte konstant $L = 0$ ist.

Aufgrund der Symmetrie und der homogenen Dichte der Holzplatte ist der Schwerpunkt der gesamten Platte genau zwischen den beiden Schwerpunkten der beiden kongruenten Einzelplatten (siehe Markierungen auf Skizze 2).

$$\vec{S} = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{a}{2}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} = \frac{a}{4}\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix} \tag{27}$$

Die drei Aufhängepunkte der Seile bezüglich des Schwerpunktes sind nun:

$$\vec{r}_1 = \frac{a}{4}\begin{pmatrix}-3\\-5\\0\end{pmatrix} \tag{28}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{a}{4}\begin{pmatrix}5\\-1\\0\end{pmatrix} \tag{29}$$

$$\vec{r}_3 = \frac{a}{4}\begin{pmatrix}1\\7\\0\end{pmatrix} \tag{30}$$

Daraus ergeben sich mit $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ die drei wirkenden Drehmomente.

$$\vec{M}_1 = \frac{a}{4}\begin{pmatrix}-3\\-5\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\F_1\end{pmatrix} = \frac{a}{4}\begin{pmatrix}-5\\3\\0\end{pmatrix} F_1 \tag{31}$$

$$\vec{M}_2 = \frac{a}{4}\begin{pmatrix}5\\-1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\F_2\end{pmatrix} = \frac{a}{4}\begin{pmatrix}-1\\-5\\0\end{pmatrix} F_2 \tag{32}$$

$$\vec{M}_3 = \frac{a}{4}\begin{pmatrix}1\\7\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\F_3\end{pmatrix} = \frac{a}{4}\begin{pmatrix}7\\-1\\0\end{pmatrix} F_3 \tag{33}$$

Nun muss die Summe aller Drehmomente 0 ergeben. Daraus entsteht ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten. Ein Parameter - also eine Kraft in diesem Fall - muss unabhängig gewählt werden. Da wir aber die Gravitationskraft als bekannt voraussetzen dürfen folgt aus der Gleichgewichtsbedingung in Gleichung 26 direkt:

$$F_3 = F_\mathrm{G} - F_2 - F_1 \tag{34}$$

Mit dieser Gleichung reduziert sich unser Gleichungssystem auf 2 Gleichungen mit 2 Variablen und führt zu einer eindeutigen Lösung.

$$\begin{cases} -5F_1 - F_2 + 7F_3 = 0 \\ 3F_1 - 5F_2 - F_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -12F_1 - 8F_2 + 7F_\mathrm{G} = 0 \\ 4F_1 - 4F_2 - F_\mathrm{G} = 0 \end{cases} \tag{35}$$

$$\Rightarrow F_1 = F_2 + \frac{1}{4}F_\mathrm{G} \tag{36}$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{1}{5}F_\mathrm{G} \tag{37}$$

$$\overset{36}{\Rightarrow} F_1 = \frac{9}{20}F_G \tag{38}$$

$$\overset{34}{\Rightarrow} F_3 = \frac{7}{20}F_G \tag{39}$$

d) Setze in die Gleichungen aus Teilaufgabe c) folgenden Wert für F_G ein:

$$F_\mathrm{G} = mg \tag{40}$$

und erhalte für die drei Teilkräfte:

$$F_1 = \frac{9}{20}mg = 4{,}5\mathrm{N} \tag{41}$$

$$F_2 = \frac{1}{5}mg = 2{,}0\mathrm{N} \tag{42}$$

$$F_3 = \frac{7}{20}mg = 3{,}5\mathrm{N} \tag{43}$$

Aufgabe 5

a) Es gilt:

$$F = qE\frac{\Delta l}{l} \tag{44}$$

Diese Formel gilt allerdings nur für eine gleichmäßig auf alle Teilchen wirkende Kraft. Da das Seil aber in einem Schacht hängt, wirkt auf die Teilchen eine unterschiedliche, von der Höhe abhängige Kraft. Auf ein infinitesimales Volumenelement ΔV ganz oben wirkt die Gewichtskraft des gesamten Seils (alles "hängt" sozusagen an diesem kleinen Volumenelement dran). In der Mitte wirkt die Kraft $\frac{M}{2}g$, da alle Teilchen darüber keine Kraft auf dieses kleine Volumenelement ausüben. Ganz unten wirkt dann die Kraft $dm \cdot g$. Das Seil wird also nicht gleichmäßig gedehnt.

Schauen wir uns also die Gewichtskraft an, die auf ein infinitesimales Stück Seil wirkt:

$$dF = dm \cdot g = dl \cdot \rho q \cdot g \tag{45}$$

wobei q die Querschnittsfläche des Seiles ist und dl der Abstand vom unteren Ende. Nun betrachten wir die Längenänderung, die eine infinitesimale Kraft verursacht (Hooksches Gesetz):

$$dF = qE\frac{d\Delta l}{l} \Rightarrow d\Delta l = \frac{dF \cdot l}{qE} \tag{46}$$

Diese beiden Kräfte müssen gleich sein, da außer der Schwerkraft keine andere Kraft eine Längenänderung bewirken kann. Einsetzen von Gleichung 45 in Gleichung 46 liefert:

$$d\Delta l = \frac{\rho q g l}{qE} dl \Rightarrow \Delta l = \int_0^L dl \cdot \frac{\rho g}{E} l = \frac{1}{2} L^2 \frac{\rho g}{E} = 15{,}3\text{m} \tag{47}$$

b) Die Rechnung ist analog zu der in Teilaufgabe a). Allerdings wirkt hier noch die Auftriebskraft des Wassers, die entgegen der Gravitationskraft wirkt. Diese Auftriebskraft "drückt" auf die untere Querschnittsfläche des Körpers und ist somit für alle infinitesimalen Volumenelemente des Seils gleich groß. Es wird also lediglich F um einen konstanten Faktor verkleinert.

$$F = F_{\text{Gewichtskraft}} - F_{Auftrieb} = \rho_{\text{Stahl}} V g - \rho_{\text{Wasser}} V g = (\rho_{\text{Stahl}} - \rho_{\text{Wasser}}) V g \tag{48}$$

Daraus ergibt sich die Gleichung für Δl (Gl. 47):

$$\Delta l = \frac{1}{2} L^2 \frac{\rho_{\text{Stahl}} - \rho_{\text{Wasser}}}{E} g = 12{,}3\text{m} \tag{49}$$

c) Die größte Kraft wirkt auf das Seil ganz oben (Begr. siehe Teil a). Wenn es reißt, dann zuerst dort. Ganz oben wirkt die Kraft

$$F = mg = \rho q L g \tag{50}$$

und

$$\sigma = \frac{F}{q} = \frac{\rho q g L}{q} = \rho g L \Rightarrow L = \frac{\sigma}{\rho g} = 10590\text{m} \tag{51}$$

Aufgabe 6

Die Formel für den Biegepfeil lautet:

$$s = \frac{L^3}{3EB}F \tag{52}$$

wobei B das Biegemoment oder auch Flächenträgheitsmoment ist. Die Herleitung dieser Formel findet sich im Demtröder auf S. 165ff. Es gilt also nurmehr die Biegemomente der beiden Trägertypen zu berechnen.

a) Das Biegemoment ist hier:

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dz \cdot bz^2 = \frac{bd^3}{12} \tag{53}$$

Dabei wird über die Querschnittsfläche integriert und z ist die Richtung der Kraft.

$$\Rightarrow s = \frac{4L^3}{bEd^3}F = 40\text{cm} \tag{54}$$

b) B ist ja bereits in der Angabe angegeben.

$$\Rightarrow s = \frac{4L^3}{E(b_1 d_1^3 - b_2 d_2^3)}F = 21\text{cm} \tag{55}$$