**1.** Gegeben ist der Vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Man berechne:

**a)** die *Länge* des Vektors $\vec{a}$; *(Lösung: $\sqrt{14}$ )*

**b)** die *Länge* der *Projektion* von $\vec{a}$ auf die *x,y-Ebene; (Lösung: $\sqrt{10}$ )*

**c)** einen *Vektor* $\vec{b}$ in der *x,y-Ebene*, welcher *senkrecht* zum Vektor $\vec{a}$ steht;

**d)** den *Einheitsvektor* von $\vec{b}$;

**e)** das *Skalarprodukt* von $\vec{a}$ mit dem Vektor $\vec{c} = (2,0,0)$; *(Lösung:* 6*)*

**f)** das *Vektorprodukt* $\vec{a} \times \vec{c}$ *(Lösung:* (0,4,-2)*)*.

**2.** Zwei Schiffe (1) und (2) bewegen sich aufeinander zu. Mit Hilfe von Geschwindigkeitsmessung und Kompass werden folgende *Geschwindigkeitsvektoren* bestimmt:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{n.m.h}^{-1}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{n.m.h}^{-1}. \qquad \text{(1 n.m. = 1 nautische Meile = 1,852 km)}$$

Durch Peilung um 12:30 Uhr wird auch ihre *Position* ermittelt:

$$\vec{r}_1(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{n.m.} \ \vec{r}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{n.m.}$$

**a)** Der Vektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ gibt die *Lage* des Schiffs (2) relativ zum Schiff (1) an. Man bestimme ihn als *Funktion der Zeit*.

**b)** Wann und wo haben die beiden Schiffe den geringsten *Abstand* voneinander? *(Lösung: ca.* 1 h 9 min *nach* 12:30 *Uhr, d. i. um* 13:39 *Uhr. Schiff (1) ist bei* $\begin{pmatrix} -0{,}69 \\ 0 \end{pmatrix}$ n.m., *Schiff (2) bei* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}46 \end{pmatrix}$ n.m.

*Relativabstand:* $\left|\begin{pmatrix} 0{,}69 \\ 0{,}46 \end{pmatrix}\right|$ n m.*)*

**c)** Wird der Sicherheitsabstand von 1 n.m. unterschritten?

*Hinweise: Wir vernachlässigen die Erdkrümmung, sodass wir ein zweidimensionales, ebenes Problem erhalten. Es ist ratsam, den Zeitpunkt der Peilung möglichst einfach zu wählen (z. B.: $t$ = 0 h; $t$ ist dann die Zeit in Stunden nach 12:30 Uhr. Es gibt prinzipiell verschiedene Möglichkeiten, diese Aufgabe zu lösen, die sich im Rechenaufwand unterscheiden.*

**3.** **Navigationssystem:** Ein GPS-Navigationssystem erlaubt die Eingabe von Positionen auf der Karte in **Längen- und Breitengraden**. Diese können mit einer maximalen Genauigkeit von **Bogensekunden** angegeben werden.

**a)** Wo weisen diese Positionsangaben die **maximale Ungenauigkeit in Metern** auf und wie groß ist diese? Warum ist die Ungenauigkeit **ortsabhängig**? *(Lösung: ca. 30 m sowohl in N/S als auch in O/W-Richtung)*

**b)** Sie befinden sich an einer Position mit den GPS-Koordinaten des **Breitengrades** von **48° 7' 13" nördlicher Breite** und des **Längengrades** von **16° 19' 30"**. Bestimmen Sie die Komponenten des Radiusvektors dieses Ortes in einem rechtshändigen kartesischen Koordinatensystem unter der Annahme, dass die Erde vollkommen kugelförmig ist.

*Hinweis: Für den Erdradius verwende man einen Wert von 6300 km; Die x-Koordinate des kartesischen Koordinatensystems liege in der Ebene des Nullmeridians.*

**4.** Ein Flugzeug erhält zum Zeitpunkt $\boldsymbol{t = 0}$ in einer Höhe von **33000 fuss** bei einer **Horizontal-geschwindigkeit $\boldsymbol{v_H = 580}$ mph** vom Tower die Anweisung, bei **konstantem $\boldsymbol{v_H}$** einen **parabolischen Sinkflug** einzuleiten, sodass **nach 10 min eine Höhe von 20000 fuss** erreicht wird.

**a)** Man berechne die aus diesen Anweisungen resultierende Bahnkurve in einem **rechtsdrehendem Koordinatensystem**, in dem die von der Parabel aufgespannte Ebene in der $y$, $z$-Ebene und der **Startpunkt des Sinkfluges bei $\boldsymbol{x_0 = 0}$ fuss**, **$\boldsymbol{y_0 = 0}$ fuss** und **$\boldsymbol{z_0 = 33000}$ fuss** liegen.

**b)** Wieviele Kilometer hat das Flugzeug in diesen 10 Minuten zurückgelegt? *(<u>Lösung</u>:* 155,57 km*)*

*<u>Hinweis</u>:* 1 fuss = 0,3048 m, 1 Meile = 1,609344 km.

**5.** **Peter und Rolf am Flughafen.** Die Zwillinge Peter und Rolf sind auf dem Weg zu ihrem Flugsteig. Beide gehen mit der **gleichen Geschwindigkeit** ($\boldsymbol{v_R = v_P}$), bis sie bei einem **Laufband** der Länge $\boldsymbol{L}$ ankommen. Der sportliche Peter will den vollen Weg zu Fuß gehen, während Rolf das Laufband benutzt. Auf dem Laufband **geht Rolf immer noch mit der ursprünglichen Geschwindigkeit weiter**.
Auch Peter **behält seine Geschwindigkeit zunächst bei**, bis er bemerkt, dass **direkt am Beginn des Laufbandes** ein Passant gestürzt ist. Er dreht sich rasch um und läuft mit der **doppelten Geschwindigkeit** zurück, um Hilfe zu leisten.
Am Anfang des Laufbandes angekommen, sieht Peter, dass Rolf das **Ende des Laufbandes** erreicht hat.

**a)** Man fertige eine **Situationsskizze** an und formuliere die oben gegebenen Beziehungen zwischen den einzelnen Geschwindigkeiten mathematisch. Weiters definiere man die Bezugssysteme des Problems.

**b)** Man berechne zunächst **Peters Umkehrposition $\boldsymbol{x_U}$**, **bezogen auf die Länge $\boldsymbol{L}$ des Laufbandes** für eine **beliebige Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_L}$ des Laufbandes**.

**c)** Man berechne die Umkehrposition $\boldsymbol{x_U}$ für $\boldsymbol{v_L = v_R}$ *(<u>Lösung</u>:* $x_U = L/3$*)*.

*<u>Hinweis:</u> Die Zeit, welche Peter zum Umdrehen und zum Zurückschauen benötigt, ist vernachlässigbar*

**6.** **Abschätzen einer alltäglichen Verkehrssituation.** Ein PKW fährt auf einer Bundesstraße mit konstantem Sicherheitsabstand $\boldsymbol{d = 40}$ **m** hinter einem LKW ($\boldsymbol{l = 25}$ **m**) mit der konstanten Geschwindigkeit von **80 kmh$^{-1}$** her. Als der PKW-Fahrer eine **300 m** lange freie Strecke einsehen kann, setzt er zum Überholen an. Dabei beschleunigt er mit $\boldsymbol{a = 1{,}3}$ **ms$^{-2}$** bis auf $\boldsymbol{v = 100}$ **kmh$^{-1}$**.

**a)** Bevor Sie rechnen, schätzen Sie ab: schafft er das Überholen gefahrlos?

**b)** Wie lange sind Überholzeit und Überholweg, wenn auch beim Wiedereinordnen der Sicherheitsabstand von **40 m** eingehalten werden soll? *(<u>Lösung</u>:* $t_Ü = 21$ s*;* 573 m*)*

**c)** Man zeichne ein $\boldsymbol{s(t)}$- und ein $\boldsymbol{v(t)}$-Diagramm.