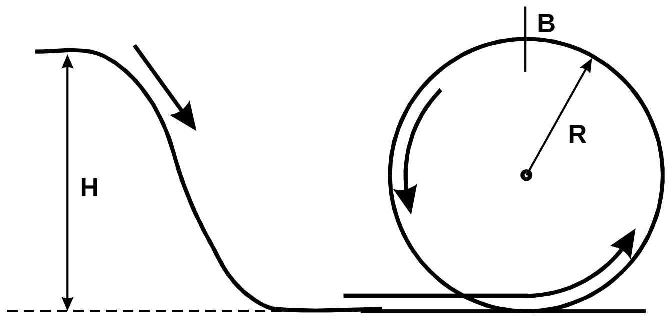
1. Ein Wagen der Masse $\boldsymbol{m}$ **= 250 kg** rollt die *abgebildete* Bahn herab.

a) Welche *Kräfte* wirken im Punkt ***B*** auf den Wagen?
b) Wie groß muss die Höhe ***H*** sein, damit der Wagen die Bahn *vollständig* durchläuft?

(Lösung: $H \geq \frac{5}{2}R$)

c) Beschreiben Sie die Bewegung, falls der Wagen von einer Höhe, die kleiner als ***H*** ist, startet.

Hinweis: Die Wagenräder seien klein und sollen nur geringe Masse haben, sodass ihre Drehbewegung vernachlässigt werden kann!



2. Wie groß muss die **Mindestgeschwindigkeit** sein, die ein Körper beim Abschuss von der Erde haben muss, damit er den Mond erreicht? *(Lösung:* 11,1 kms^{-1}*)*

3. **Ein einfaches Planetensystem:** Zwei Planeten umkreisen ihr Zentralgestirn auf kreisförmigen Bahnen. Der **innere** mit der **Winkelgeschwindigkeit** $\boldsymbol{\omega_1}$ am **Bahnradius** $\boldsymbol{r_1}$ der **äußere mit** $\boldsymbol{\omega_2}$ auf $\boldsymbol{r_2}$. Bestimmen Sie

a) Die Entfernung der beiden Planeten in **Konjunktion** (geringste Distanz) und **Opposition** (größte Distanz).
b) Die Entfernung der beiden Planeten $|\vec{r}_{12}|$ **zu jedem beliebigen Zeitpunkt *t***.

(Lösung: $|\vec{r}_{12}| = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot cos(\omega_1 - \omega_2) \cdot t}$)

Der **zeitliche Nullpunkt** werde in den **Zeitpunkt der Konjunktion** gelegt. Bestimmen Sie für beide Fälle, $\omega_1 > \omega_2$ und $\omega_1 < \omega_2$ allgemein

c) Die **Zeitpunkte $\boldsymbol{t_n}$ für die *n*-te Konjunktion bzw. Opposition** (n = 0 bezeichne den Startzeitpunkt, d. h. $t_0 = 0$). *(Lösung: $\omega_1 - \omega_2 > 0 : t_n = \frac{n \cdot \pi}{\omega_1 - \omega_2}$; die Lösung für $\omega_1 - \omega_2 < 0$ ist analog zu ermitteln)*
d) Liefern Sie eine mathematische Begründung, dass für $\boldsymbol{n}$ **= 0, 2, 4, … Konjunktionen** und für $\boldsymbol{n}$ **= 1, 3, 5, … Oppositionen** sowohl für $\omega_1 > \omega_2$ als auch für $\omega_1 < \omega_2$ vorliegen.

4. Ein Satellit bewegt sich knapp über der Erdoberfläche.

a) Bewegt er sich schneller oder langsamer als der Mond?
b) Wie kann man das Geschwindigkeitsverhältnis durch das Radienverhältnis ausdrücken?
c) Wie verhalten sich die Perioden der Bahnbewegungen?
d) Bestimmen Sie die Umlaufdauer des Satelliten aus der des Mondes (**27 d**) und den Bahnradien $\boldsymbol{r_{EM}}$ **= 384000 km** und $\boldsymbol{r_{Sat}}$ **= 6370 km**! (*Lösung:* T = 1,405 h)

5. Beim Periheldurchgang des Kometen ***Halley*** im Februar 1986 wurden seine Bahnelemente genau bestimmt: Perihelabstand $\boldsymbol{r_P = 8{,}784 \cdot 10^{10}}$ **m**, numerische Exzentrizität $\boldsymbol{\varepsilon = 0{,}9673}$, Umlaufzeit $\boldsymbol{T = 76{,}0289}$ **a**.

➔ Man berechne daraus den Aphelabstand $\boldsymbol{r_A}$, die Halbachsen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ der Bahnellipse, sowie die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v_P}$ und $\boldsymbol{v_A}$ im Perihel, bzw. Aphel.
(Lösung: $r_A = 5{,}285 \cdot 10^{12}$ m, $a = 2{,}686 \cdot 10^{12}$ m, $b = 6{,}813 \cdot 10^{11}$ m, $v_P = 54{,}5$ kms^{-1}, $v_A = 0{,}9$ kms^{-1}*)*

6. **Das Raketenproblem in seiner diskretisierten Form:** Eine Rakete befinde sich im schwerelosen Raum. Ihre Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $\boldsymbol{t = 0}$ sei $\boldsymbol{v_R(t = 0) = 0}$, ihre Anfangsmasse inklusive Treibstoff sei $\boldsymbol{M_T}$ Für Zeiten $\boldsymbol{t > 0}$ beginne der Treibstoff mit einer Konstanten Rate α abzubrennen. Der Treibstoffstrahl besitze die konstante Austrittsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v_P}$. Unter diesen Bedingungen lautet die analytische Lösung des Problems für die Raketengeschwindigkeit $v_R(t) = v_P \cdot ln \frac{M_T}{M_T - \alpha \cdot t}$. In einer diskretisierten Form kann das Problem folgendermaßen formuliert werden: Zu Zeitpunkten $\boldsymbol{t_i}$, welche um ein konstantes Zeitintervall $\boldsymbol{\Delta t}$ getrennt sind, wird von der Rakete je ein Partikel der Masse $\mathbf{M_P}$ mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_P}$ abgefeuert.

a) Stellen Sie die Impulsbilanz des Problems kurz vor und kurz nach $\boldsymbol{t_i}$ auf und ermitteln Sie so einen rekursiven Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{v_R(t_{i-1})}$ und $\boldsymbol{v_R(t_i)}$.

b) Berechnen Sie für $\boldsymbol{M_T = 1000}$ **kg**, $\boldsymbol{M_P = 1}$ **kg**, $\boldsymbol{v_P = 50}$ **m/s** und $\boldsymbol{\alpha = 1}$ **Partikel/s** die ersten 5 Geschwindigkeiten der Rakete mittels Rekursion und vergleichen Sie sie mit der analytischen Lösung.
(Lösung: Rekursion: $v_R^0 = 0$ ms^{-1}, $v_R^1 = 0{,}05$ ms^{-1}, ... $v_R^5 = 0{,}2505$ ms^{-1}
Analytisch: $v_R^0 = 0$ ms^{-1}, $v_R^1 = 0{,}05$ ms^{-1}, ... $v_R^5 = 0{,}2506$ ms^{-1}*)*

Hinweis: Alle Massen können als punktförmig betrachtet werden. Man beachte die Richtungen der Rakete und der Projektile relativ zueinander.