Grundlagen der Physik Ia - Übungen

Ass.Prof. Dr. R.A. Wilhelm
wilhelm@iap.tuwien.ac.at
TU Wien - Grundlagen der Physik (130.001) 2022W

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE PHYSIK
Institute of Applied Physics

27.10.2022

Aufgabe 3.1 - 2 Pkt.

Vom höchsten Punkt einer Kugel (Radius r) gleitet eine Punktmasse m reibungsfrei und löst sich an einer bestimmten Stelle von der Kugeloberfläche.
(a) Um welchen Höhenunterschied h liegt diese Stelle tiefer als der höchste Punkt?
(b) Um welchen Polarwinkel α_0 hat sich dabei die Punktmasse über die Kugeloberfläche bewegt?

Die Fragen (c) und (d) sind fakultativ und werden nicht bewertet. Sie sollen Ihnen aber zeigen, dass Sie mit Ihrem Wissen bisher bereits recht komplexe Probleme lösen können! Dieses Niveau ist aber in jedem Fall prüfungsrelevant.

(c) Berechnen Sie zwischen Start- und Ablösepunkt die zurückgelegte Strecke s entlang der Kugeloberfläche, die Geschwindigkeit v_T und die Beschleunigung a_T der Punktmasse als Funktion des Winkels α.
(d) Wie lange dauert es, bis die Punktmasse den Ablösepunkt erreicht?

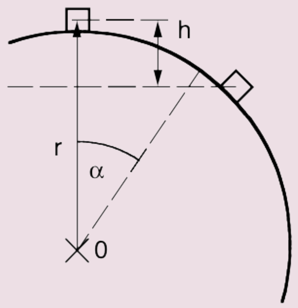

Figure 1: Skizze des Problems

Aufgabe 3.2 - 2 Pkt.

Gegeben sei die in der Abb. gezeigte Anordnung, welche aus einer horizontalen ebenen Bahn unbestimmter Länge und einer damit verbundenen vertikal ausgerichteten halbkreisförmigen Bahn mit Radius r besteht. Ein Gegenstand mit der Anfangsgeschwindigkeit v bewegt sich reibungsfrei entlang der ebenen Bahn, durchläuft vollständig die halbkreisförmige Bahn und fällt dann zurück auf seine Ausgansposition.
(a) Berechnen Sie die minimale Länge der horizontalen Bahn.
(b) Welche Anfangsgeschwindigkeit v muss der Gegenstand dabei haben?

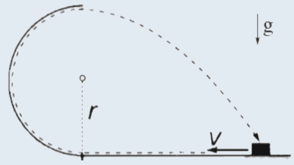

Figure 2: Skizze des Problems.

Aufgabe 3.3 - 2 Pkt.

Wir nehmen ein nicht-konservatives Kraftfeld $\vec{F} = (y^2 - x^2)\vec{e}_x + 3xy\vec{e}_y + xy\vec{e}_z$ an. Berechnen Sie die Arbeit, die an einem Massenpunkt, der sich vom Punkt $(0, 0, z_0)$ nach (x_0, y_0, z_0) bewegt, in diesem Kraftfeld verrichtet wird, wenn der Massenpunkt einmal geradlinig von $(0, 0, z_0)$ nach $(x_0, 0, z_0)$ und dann geradlinig von $(x_0, 0, z_0)$ nach (x_0, y_0, z_0) bewegt wird, bzw. das andere Mal geradlinig von $(0, 0, z_0)$ nach $(0, y_0, z_0)$ und dann geradlinig von $(0, y_0, z_0)$ nach (x_0, y_0, z_0) bewegt wird.

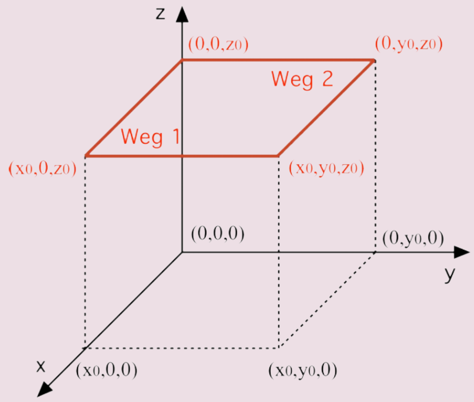

Figure 3: Skizze des Problems.

Aufgabe 3.4 - 3 Pkt.

Ein unbekanntes Phänomen hat die Erde auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne bis zum Stillstand abgebremst: $r(t=0) = R_{ES}$, $v(t=0) = 0$. Wie lange dauert es dann bis die Erde in die Sonne fällt?
(a) Lösen Sie das Problem über das Bewegungsgesetz (d.h. die Bewgungsgleichung) zuerst analytisch, dann numerisch!
(b) Lösen Sie das Problem über die Keplerschen Gesetze zuerst analytisch, dann numerisch!

Entfernung Erde-Sonne: $R_{ES} = 1.496 \cdot 10^{11}$ m
Masse Sonne: $M_S = 1.989 \cdot 10^{30}$ kg
Radius Sonne: $R_S = 6.96 \cdot 10^8$ m
Masse Erde: $M_E = 5.975 \cdot 10^{24}$ kg
Radius Erde: $R_E = 6.378 \cdot 10^6$ m
Gravitationskonstante $G = 6.673 \cdot 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}.

Verwenden sie die Näherung $R_S \to 0$, da sich die Ableitung sehr vereinfacht. Der Fehler beträgt damit nur ca. 0.01 Tage.

Zur Lösung von (a) machen Sie sich bewusst wie der Zusammenhang zwischen der wirkenden Kraft und der Beschleunigung ist, welches Gesetz die Kraft bestimmt und wie dann die Beschleunigung mit der Geschwindigkeit und dem Abstand Erde-Sonne zusammenhängt. Drücken Sie diese Zusammenhänge mathematisch aus (Differentialgleichungen), und lösen Sie diese nach den Größen auf, die Sie interessieren. Im Falle Sie finden zu viele Unbekannte, nutzen Sie die gegebenen Anfangsbedingungen.

Lösungshinweis im weiteren:

$$\begin{aligned} \int_a^0 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}} dx &= \\ \sqrt{a^3} \int_0^1 \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-y}} dy &= -\sqrt{a^3}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Zur Kontrolle: Die Lösung lautet ca. 65 Tage.

Aufgabe 3.5 - 2 Pkt.

Der Komet Halley hat eine Umlaufzeit von 75.3 Jahren um die Sonne. Seine kleinste Entfernung zur Sonne ist 0.586 AE.
(a) Berechnen Sie die maximale Distanz zur Sonne und die numerische Exzentrizität seiner elliptischen Bahn.
(b) Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit des Kometen bei seiner kleinsten Entfernung zur Sonne zunächst analytisch mit Hilfe der Erhaltungssätze und dann numerisch.

Zum Vergleich Ihrer Lösung:
Numerische Exzentrizität: $\epsilon = 0.967$
Perihel: 0.586 AE
Aphel: 35.082 AE
Große Halbachse: 17.834 AE
Bahngeschwindigkeit im Perihel: 54.57 km/s
Siderische Umlaufzeit: 75.32 a

Aufgabe 3.6 - 3 Pkt.

Ein Spionagesatellit der Masse $m_S = 1000$ kg befinde sich auf einer kreisförmigen Umlaufbahn 300 km über der Erdoberfläche. Berechnen Sie
(a) seine Umlaufgeschwindigkeit,
(b) seine Periodendauer (Dauer eines Umlaufs),
(c) die auf ihn dabei wirkende Radialbeschleunigung.
(d) Der Spionagesatellit soll seine Umlaufbahn geringfügig korrigieren. Dazu zündet er seine Triebwerke um seine Geschwindigkeit in Bewegungsrichtung etwas zu erhöhen. Welche Beschleunigung a wirkt auf den Satelliten als Funktion der vergleichsweise kurzen Brenndauer und im speziellen unmittelbar nach Zündung wenn die Triebwerke Gase mit einer Geschwindigkeit $v_e = 2500$ m/s (relativ zum Satelliten) und einem Massendurchsatz $\mu = 0.04$ kg/s ausstoßen? Welche Schubkraft entwickeln die Triebwerke dabei?

Hinweis: Rechnen sie zunächst allgemein und setzen erst zum Schluss numerische Werte ein.

Masse Erde: $m_E = 5.975 \cdot 10^{24}$ kg
Radius Erde: $r_E = 6.378 \cdot 10^6$ m
Gravitationskonstante: $G = 6.673 \cdot 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}

Aufgabe 3.7 - 3 Pkt.

Es sei ein fiktives Dreisternesystem entsprechend der Skizze gegeben. Die 3 Sterne haben jeweils die Masse M und bilden ein gleichseitiges Dreieck. Ein Raumschiff der Masse m nähert sich entlang der x-Achse von $+\infty$ kommend Richtung Koordinatenursprung.

(a) Berechnen Sie das Gravitationspotential $V(x,0,0)$ des Dreisternesystems für $0 < x < +\infty$.

(b) Berechnen Sie die potentielle Energie $E_P(x,0,0)$ des Raumschiffs im Dreisternesystem entlang der x-Achse für $0 < x < +\infty$.

(c) Berechnen Sie die Gravitationsfeldstärke des Dreisternesystems $\vec{g}(x,0,0)$ für $0 < x < +\infty$.

(d) Berechnen Sie die Gravitationskraft des Dreisternesystems auf das Raumschiff $\vec{F}(x,0,0)$ entlang der x-Achse für $0 < x < +\infty$.

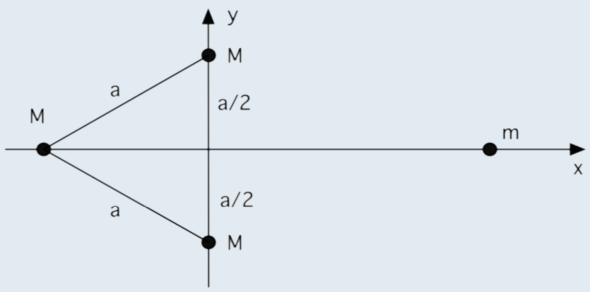

Figure 4: Skizze des Problems.