1. Gegeben ist der Vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Man berechne:

a) die *Länge* des Vektors $\vec{a}$; (*Lösung:* $\sqrt{14}$)

b) die *Länge* der *Projektion* von $\vec{a}$ auf die *x,y-Ebene*; (*Lösung:* $\sqrt{10}$)

c) einen *Vektor* $\vec{b}$ in der *x,y-Ebene*, welcher *senkrecht* zum Vektor $\vec{a}$ steht;

d) den *Einheitsvektor* von $\vec{b}$;

e) das *Skalarprodukt* von $\vec{a}$ mit dem Vektor $\vec{c} = (2, 0, 0)$; (*Lösung: 6*)

f) das *Vektorprodukt* $\vec{a} \times \vec{c}$ (*Lösung:* $(0, 4, -2)$).

2. Gegeben sind drei Punkte im zweidimensionalen Raum:

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{P}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Man berechne den *vierten Eckpunkt* des *Parallelogramms* $P_1P_2P_3P_4$, welches durch die Vektoren $\vec{a} = \vec{P_1P_2}$ und $\vec{b} = \vec{P_1P_4}$ aufgespannt wird. (*Lösung:* $\vec{P}_4 = (0, -6)$)

3. **Navigationssystem:** Ein GPS-Navigationssystem erlaubt die Eingabe von Positionen auf der Karte in **Längen- und Breitengraden**. Diese können mit einer maximalen Genauigkeit von **Bogensekunden** angegeben werden.

a) Wo weisen diese Positionsangaben die **maximale Ungenauigkeit in Metern** auf und wie groß ist diese? Warum ist die Ungenauigkeit **ortsabhängig**? (*Lösung: ca.* 30 m *sowohl in N/S als auch in O/W-Richtung*)

b) Sie befinden sich an einer Position mit den GPS-Koordinaten **48°7′13″ nördlicher Breite** und **16°19′30″ östlicher Länge**. Bestimmen Sie die Komponenten des Radiusvektors dieses Ortes in einem rechtshändigen kartesischen Koordinatensystem unter der Annahme, dass die Erde vollkommen kugelförmig ist.

Hinweis: Für den Erdradius verwende man einen Wert von 6300 km*; Die x-Koordinate des kartesischen Koordinatensystems liege in der Ebene des Nullmeridians.*

4. Zwei Schiffe (1) und (2) bewegen sich aufeinander zu. Mit Hilfe von Geschwindigkeitsmessung und Kompass werden folgende *Geschwindigkeitsvektoren* bestimmt:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{n.m.}\,\text{h}^{-1}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{n.m.}\,\text{h}^{-1}. \quad (1\,\text{n.m.} = 1 \text{ nautische Meile} = 1{,}852\,\text{km})$$

Durch Peilung um 12:30 Uhr wird auch ihre *Position* ermittelt:

$$\vec{r}_1(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{n.m.} \quad \vec{r}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{n.m.}$$

a) Der Vektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ gibt die *Lage* des Schiffs (2) relativ zum Schiff (1) an. Man bestimme ihn als *Funktion der Zeit.*

Bitte wenden.

b) Wann und wo haben die beiden Schiffe den geringsten *Abstand* voneinander?

c) Wird der Sicherheitsabstand von 1 n.m. unterschritten?

Hinweis: Wir vernachlässigen die Erdkrümmung, sodass wir ein zweidimensionales, ebenes Problem erhalten. Es ist ratsam, den Zeitpunkt der Peilung möglichst einfach zu wählen (z. B.: $t = 0\,\mathrm{h}$; t ist dann die Zeit in Stunden nach 12:30 Uhr). Es gibt prinzipiell verschiedene Möglichkeiten, diese Aufgabe zu lösen, die sich im Rechenaufwand unterscheiden.

5. **Peter und Rolf - Episode 1: Das Wettschwimmen.** Die Zwillinge Peter und Rolf sind zwei *gleich schnelle* und ausdauernde Schwimmer. Sie schaffen beide die *Geschwindigkeit* von $\mathbf{1\,m\,s^{-1}}$. Sie wollen über einen Fluß schwimmen, der **100 m** breit, **10 m** tief und **16 °C** kalt ist, um ihr Boot zu erreichen. Der Fluss hat eine **(konstante) Fliessgeschwindigkeit von** $\mathbf{80\,cm\,s^{-1}}$.

   Peter schwimmt *schräg flußaufwärts*, sodaß er den Fluß überquert, *ohne abgetrieben* zu werden. Er nimmt also den *kürzesten* Weg.

   Rolf schwimmt immer *senkrecht zum Ufer*, wird dabei aber durch die Strömung *flußabwärts getrieben.*

   a) Man berechne allgemein, wer von den beiden zuerst am anderen Ufer ankommt, wenn beide gleichzeitig losschwimmen. Beeinflußt die Bewegungskomponente *in Flußrichtung* die Schwimmzeit der beiden? Welche Anforderung muß die Fließgeschwindigkeit erfüllen, damit die Angabe einen Sinn macht?

   b) Man berechne die Schwimmzeit der beiden mit den obigen Zahlenwerten. (*Lösung:* $t_{Peter} = 167\,\mathrm{s}$; $t_{Rolf} = 100\,\mathrm{s}$)

   Hinweis: Es ist hilfreich, von beiden Schwimmern ein Geschwindigkeitsdiagramm zu zeichnen.

6. **Peter und Rolf am Flughafen.** Peter und Rolf sind auf dem Weg zu ihrem Flugsteig. Beide gehen mit der **gleichen Geschwindigkeit** ($\boldsymbol{v_R = v_P}$), bis sie bei einem **Laufband** der Länge $\boldsymbol{L}$ ankommen. Der sportliche Peter will den vollen Weg zu Fuß gehen, während Rolf das Laufband benutzt. Auf dem Laufband **geht Rolf immer noch mit der ursprünglichen Geschwindigkeit weiter**.

   Auch Peter **behält seine Geschwindigkeit zunächst bei**, bis er bemerkt, dass **direkt am Beginn des Laufbandes** ein Passant gestürzt ist. Er dreht sich rasch um und läuft mit der **doppelten Geschwindigkeit** zurück, um Hilfe zu leisten.

   Am Anfang des Laufbandes angekommen, sieht Peter, dass Rolf das **Ende des Laufbandes** erreicht hat.

   a) Man fertige eine **Situationsskizze** an und formuliere die oben gegebenen Beziehungen zwischen den einzelnen Geschwindigkeiten mathematisch. Weiters definiere man die Bezugssysteme des Problems.

   b) Man berechne zunächst **Peters Umkehrposition** $\boldsymbol{x_U}$**, bezogen auf die Länge** $\boldsymbol{L}$ **des Laufbandes** für eine **beliebige Geschwindigkeit** $\boldsymbol{v_L}$ **des Laufbandes**.

   c) Man berechne die Umkehrposition $\boldsymbol{x_U}$ für $\boldsymbol{v_L = v_R}$. (*Lösung:* $x_U = L/3$).

   Hinweis: Die Zeit, welche Peter zum Umdrehen und zum Zurückschauen benötigt, ist vernachlässigbar