1. Eine masselose Feder, an der *kein* Gewicht befestigt ist, hängt von der Decke herab. Ihre *Länge* beträgt $\boldsymbol{l = 20\,\mathrm{cm}}$. Nun wird eine Masse $\boldsymbol{m}$ am unteren Ende der Feder angebracht. Wir unterstützen zunächst das Massestück mit der Hand, sodaß die Feder ungespannt ist. Dann entfernen wir die Hand ruckartig — die Masse und die Feder beginnen zu schwingen. Der tiefste Punkt, den die Masse während der Schwingungen erreicht, liegt **10 cm** unterhalb der **Ausgangslage**.

   a) Wie groß ist die Schwingungsfrequenz? (*Lösung:* $f = 2{,}23\,\mathrm{Hz}$)

   b) Wie groß ist die Geschwindigkeit, wenn die Masse sich **5 cm** unterhalb ihrer **Ausgangslage** befindet? (*Lösung:* $v = 70\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$)

   Nun wird eine zweite Masse mit **30 dag** zur ersten hinzugefügt, was eine Gesamtmasse von $\boldsymbol{m + 30\,\mathrm{dag}}$ ergibt. Wenn dieses System schwingt, so ist seine Frequenz halb so groß wie die der Masse $\boldsymbol{m}$ allein.

   c) Wie groß ist $\boldsymbol{m}$? (*Lösung:* $m = 10\,\mathrm{dag}$)

   d) Wo ist die neue Gleichgewichtslage? (*Lösung:* $15\,\mathrm{cm}$ *unterhalb der alten Lage*)

2. **Wägung mittels Frequenzverschiebung:** Erfährt ein harmonischer Oszillator (Federkonstante D) mit der Eigen(kreis)frequenz ω_0 einen Massenzuwachs um Δm, so ändert sich die Eigen(kreis)frequenz von ω_0 auf ω_1.

   a) Man berechne allgemein Δm in Abhängigkeit von der Änderung der Eigen(kreis)frequenz.

   b) Man berechne Δm für $\boldsymbol{D = 10\,\mathrm{kN\,cm^{-1}}}$ wenn sich die Frequenz von $\boldsymbol{f_0 = 10\,\mathrm{MHz}}$ auf $\boldsymbol{f_1 = 9{,}5\,\mathrm{MHz}}$ verschiebt. (*Lösung:* $\Delta m = 27{,}4\,\mathrm{ng}$)

3. **Fahrstuhl durch den Erdmittelpunkt:** Durch den Mittelpunkt der Erde werde ein Loch gebohrt, in dem sich **reibungsfrei**, aber **unter Kontakt mit den Wänden**, eine Liftkabine bewegen kann.

   a) Man zeige **unter Vernachlässigung der Erddrehung**, dass die Kabine, wenn sie an der Erdoberfläche losgelassen wird, eine **harmonische Schwingung zwischen Startpunkt und Antipode** ausführt. Man bestimme die **Periodendauer** $\boldsymbol{T}$, die **Höchstgeschwindigkeit der Kabine** $\boldsymbol{v_{max}}$ und ihre **vollständige Weg/Zeitkurve** unter Berücksichtigung der **Anfangsbedingungen**. (*Lösung:* $T = 84{,}39\,\mathrm{min}$, $v_{max} = 28\,460{,}91\,\mathrm{km\,h^{-1}}$)

   b) Weiters zeige man, dass sich auch bei **Berücksichtigung der Erddrehung**, und wenn das Loch unter einem **beliebigen Winkel** $\boldsymbol{\alpha}$ zur Erdachse (allerdings immer noch **durch den Erdmittelpunkt**) verläuft, nur die Periodendauer verändert, nicht aber der harmonische Charakter der Schwingung.

   c) Von welchen Orten in **Europa** können Sie **Festland auf der Südhalbkugel der Erde** mit Hilfe eines solchen Schachtes erreichen. Berechnen Sie seinen ungefähren **Neigungswinkel** $\boldsymbol{\alpha}$ sowie die daraus resultierende **Reisezeit** $\boldsymbol{T_R}$. (*Lösung:* $\alpha = 50°$, $T_R = 42{,}237\,\mathrm{min}$)

   Hinweis: Erdradius $R = 6371\,\mathrm{km}$, *Erdmasse* $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$*; Die Dichte der Erde sei als homogen angenommen; eine Antipodenkarte findet sich z. B. unter https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Antipodenkarte4.jpg*

Bitte wenden.

4. Gegeben ist eine Masse $\boldsymbol{m}$, die an einer Feder (Federkonstante $\boldsymbol{D}$) befestigt ist. Zusätzlich wirkt noch eine **geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft** $\boldsymbol{F = -bv}$.

   a) Man stelle die zugehörige **Differentialgleichung** auf und gebe den Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{D}$ mit der Dämpfungskonstanten $\boldsymbol{\gamma}$ und der Eigenfrequenz $\boldsymbol{\omega_0}$ an.

   b) Man finde die **allgemeine Lösung** dieser Gleichung. Welche **drei Fälle** kann man unterscheiden? Man führe den Parameter der **Abklingzeit** $\boldsymbol{\tau = 1/\gamma}$ ein. Was sagt dieser aus? Wie lautet der Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\omega_0}$ und der Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung, $\boldsymbol{\omega}$? Was sagt er aus?

   c) Wie groß ist die **Amplitude** $\boldsymbol{x_0}$ für $m = 10\,\mathrm{g}$, $b = 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$, $D = 0{,}81\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, $x(0) = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$ und $v_0 = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$? (*Lösung:* $x_0 = 0{,}16\,\mathrm{m}$)

5. Berechnen Sie **Form** und **Maximum** der Resonanzkurve für die **Amplitude** der angeregten Schwingung als Funktion der Treiberkreisfrequenz $\boldsymbol{\omega_A}$ für den **gedämpften, getriebenen harmonischen Oszillator**. Wo liegt die **Resonanzfrequenz** $\boldsymbol{\omega_{res}}$ und wie unterscheidet sie sich von der **Kreisfrequenz** $\boldsymbol{\omega}$ des **freien, gedämpften** Systems?

6. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -a & (-\pi, 0] \\ a & (0, \pi] \end{cases}$$

   in eine **Fourier-Reihe** der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right).$$