Aufgabe 1 - 2 Pkt.

Licht besteht aus elektromagnetischen Wellen.

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

Wenn eine sichtbare Lichtwelle in einer Ebene polarisiert ist, dann

1. verläuft der Vektor des elektrischen Feldes parallel zum Vektor des magnestischen Feldes
2. verläuft der Vektor des elektrischen Feldes parallel zur Ausbreitungsrichtung.
3. hat der Vektor des elektrischen Feldes eine feste Richtung, die senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung steht, wobei der Vektor des magnetischen Feldes irgendeine Richtung haben kann.
4. hat der Vektor des elektrischen Feldes eine feste Richtung, die senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung steht, wobei der Vektor des magnetischen Feldes sowohl senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung als auch senkrecht auf den Vektor des elektrischen Feldes steht.
5. verläuft der Vektor des magnetischen Feldes parallel zur Ausbreitungsrichtung.
6. trifft keine dieser Aussagen zu.

Lösung Aufgabe 1

4

Aufgabe 2 - 2 Pkt.

Ein Strahl von unpolarisiertem Licht der Intensität I_0 fällt senkrecht auf zwei hintereinander angeordnete lineare Polarisatoren deren Transmissionsachsen um 30° zueinander verdreht sind.

(a) Welcher Bruchteil der einfallenden Intensität des Lichtes (I_1/I_0) tritt nach dem 1. Polarisator aus?
(b) Welcher Bruchteil der einfallenden Intensität des Lichtes (I_2/I_0) tritt nach dem 2. Polarisator aus?

Lösung Aufgabe 2

(a) Unpolarisiertes Licht durch 1. Pol.-filter:

$$\frac{I_1}{I_0} = 0.5$$

Nun zweiter Filter. Gesetz von MALUS:

$$I_2 = I_1 \cos^2(\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 0.75$$

(b) Gefragt ist aber I_2/I_0 und damit setzen wir ein

$$\frac{I_2}{I_0} = 0.5 \cdot 0.75 = 0.375 = \frac{3}{8}$$

Alternativ:

$$E_{nach} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+pi} E_{\parallel} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\vec{E}| \cos\phi d\phi$$

Da die Intensität proportional zum Quadrat der Feldstärke ist

$$I_{nach} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} I_{vor}\cos^2\phi d\phi = \frac{I_{vor}}{2}$$

Nach dem 1. Polaristor gilt in Bezug auf den Drehwinkel ϑ des 2. Polarisators

$$E_{0\|} = E_0 \cos\vartheta$$

und

$$E_{0\perp} = E_0 \sin\vartheta.$$

Da wieder gilt $I \propto E^2$ folgt

$$I(\vartheta) = I_1 \cos^2\vartheta$$

Aufgabe 3 - 1 Pkt.

Eine ebene Welle kann durch sein elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right)$ beschrieben werden, wobei $\vec{E}_0$ senkrecht zu $\vec{k}$ steht. Wie lautet dann, in kartesischen Koordinaten, die Gleichung einer ebenen Welle, die sich längs der Raumdiagonale im kartesischen Koordinatensystem ausbreitet? Geben Sie die Lösung als Funktion des Betrags $k = |\vec{k}|$ und dem Abstand vom Koordinatenursprung $r = |\vec{r}| = \left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right|$ an.

Lösung Aufgabe 3

In obiger Gleichung gibt der Wellenvektor $\vec{k}$ die Richtung an, in der die Welle läuft. Die Flächen konstanter Phase sind Ebenen senkrecht zum Vektor $\vec{k}$.

Der Einheitsvektor in die gewünschte Richtung lautet: $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Damit ist der Wellenvektor mit dem Betrag k in dieser Richtung

$$\vec{k} = \frac{k}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und das Skalarprodukt

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \frac{k}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{k}{\sqrt{3}} \cdot (x + y + z)$$

Die Wellengleichung lautet somit

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - (k/\sqrt{3})(x + y + z) + \varphi_0\right)$$

Aufgabe 4 - 3 Pkt.

Eine linear polarisierte Welle der Form $\vec{E} = \vec{e}_x \cdot E_0 e^{i(\omega t - kz + \varphi)}$ mit der Vakuumfrequenz $v_0 = 8 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$ falle aus der Luft ($n_1 = 1$) kommend bei $z = 0$ senkrecht auf ein homogenes Material mit dem komplexen Brechungsindex $\hat{n} = 5.0 - 0.10 \cdot i$ bei dieser Frequenz.

(a) Wie groß sind Kreisfrequenz, Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit des Lichtstrahls im Vakuum?

(b) Wie groß sind Kreisfrequenz, Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit des Lichtstrahls im Medium?

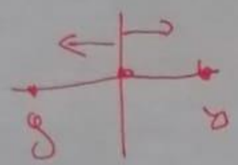
(c) Wie viel Prozent der Intensität der Strahlung wird an der Grenzfläche reflektiert?

Hinweis: Die Fresnel-Formel lauten

$$
\begin{aligned}
\rho_s &= \frac{n_1 \cos\alpha - n_2 \cos\beta}{n_1 \cos\alpha + n_2 \cos\beta} \\
\tau_s &= \frac{2n_1 \cos\alpha}{n_1 \cos\alpha + n_2 \cos\beta} \\
\rho_p &= \frac{n_2 \cos\alpha - n_1 \cos\beta}{n_2 \cos\alpha + n1 \cos\beta} \\
\tau_p &= \frac{2n_1 \cos\alpha}{n_2 \cos\alpha + n_1 \cos\beta}
\end{aligned}
$$

Lösung Aufgabe 4

(a) **Vakuum:**



$$\omega = 2\pi \cdot 8 \cdot 10^{14} = 5.03 \cdot 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\lambda = c/v = \frac{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{8 \cdot 10^{14}\,1/\mathrm{s}} = 0.375\,\mu\mathrm{m}$$

$$v_{ph} = \omega/k = \lambda v = c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

(b) **Medium:**

$$\omega = 2\pi \cdot 8 \cdot 10^{14} = 5.03 \cdot 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\lambda_{med} = \lambda_{vac}/\,\mathrm{Re}(n) = \frac{3.75 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}}{5} = 0.075\,\mu\mathrm{m}$$

$$v_{ph} = \omega/k = \lambda_{vac} v/\,\mathrm{Re}(n) = c/\,\mathrm{Re}(n) = \frac{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{5} = 0.6 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

(c) $R = |\rho|^2$

$$R = \left|\frac{\hat{n} - 1}{\hat{n} + 1}\right|^2 = \left|\frac{n - i\kappa - 1}{n - i\kappa + 1}\right|^2 = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2} = \frac{(5-1)^2 + 0.10^2}{(5+1)^2 + 0.10^2} \approx 0.444$$

d.h. ca. ~~25%~~ der einfallenden Intensität der Strahlung wird reflektiert.

44%

Aufgabe 5 - 2 Pkt.

Die Brechzahl von Glas kann näherungsweise durch die empirische Cauchy-Beziehung $n = A + B/\lambda^2$ beschrieben werden.

Berechnen Sie hiermit Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bei $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$ für ein Glas mit $A = 1.10$ und $B = 2.25 \cdot 10^4\,\mathrm{nm}^2$.

Lösung Aufgabe 5

Phasengeschwindigkeit:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} = \frac{c}{A + B/\lambda^2}$$

$$\Rightarrow v_{ph} \approx \frac{2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{1.10 + 2.25 \cdot 10^4\,\mathrm{nm}^2/(600\,\mathrm{nm})^2}$$

$$\approx 2.58 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

Gruppengeschwindigkeit

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$$

mit

$$\omega = \frac{kc}{n} = \frac{kc}{A + B \cdot \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2}$$

mit Quotientenregel:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$v_{gr} = \frac{\left(A + B\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\right)c - kc\left(B\frac{2k}{(2\pi)^2}\right)}{\left(A + B\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(A + B\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\right)c - \left(B\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\right)2c}{\left(A + B\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\right)^2}$$

$$= c\frac{\left(A - B\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\right)}{\left(A + B\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\right)^2} = c\frac{\left(A - \frac{B}{\lambda^2}\right)}{\left(A + \frac{B}{\lambda^2}\right)^2}$$

$$\hat{=} v_{ph}\frac{\left(A - \frac{B}{\lambda^2}\right)}{\left(A + \frac{B}{\lambda^2}\right)} \hat{=} v_{ph}\frac{(A\lambda^2 - B)}{(A\lambda^2 + B)}$$

$$\Rightarrow v_{gr} \approx \overset{2{,}58}{\cancel{2.998}} \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \cdot \frac{\left(1.10 - \frac{2.25 \cdot 10^4\,\mathrm{nm}^2}{(600\,\mathrm{nm})^2}\right)}{\left(1.10 + \frac{2.25 \cdot 10^4\,\mathrm{nm}^2}{(600\,\mathrm{nm})^2}\right)^{\cancel{2}}}$$

$$\approx 2.\cancel{676 \cdot 10^8\,\mathrm{m/}}\mathrm{s} \qquad 2{,}3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$(\mathrm{nm})^2 = (10^{-9}\,\mathrm{m})^2 = (10^{-9})^2\,\mathrm{m}^2 = 10^{-18}\,\mathrm{m}^2$$