3. Tutorium Analytische Mechanik VU, 16.12.2019

1. **Zyklische Koordinaten und Erhaltungsgrößen**

   Die potentielle Energie eines Teilchens in drei Dimensionen mit Masse m sei gegeben durch

   $$V(x, y, z) = \frac{1}{2}\Big(k_x x^2 + k_y y^2 + k_z z^2\Big).$$

   a) Berechnen Sie die Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten (r, θ, φ)

   $$\begin{aligned} x(r, \theta, \varphi) &= r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y(r, \theta, \varphi) &= r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z(r, \theta, \varphi) &= r \cos(\theta). \end{aligned}$$

   b) Berechnen Sie die generalisierten Impulse p_r, p_θ und p_φ.

   c) Identifizieren Sie im Fall

   $$k_x \neq k_y \neq k_z$$

   und im Fall

   $$k_x = k_y \neq k_z,$$

   welche der Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) zyklisch sind und bestimmen Sie die zugehörigen Erhaltungsgrößen.

2. **Legendretransformation**

   Die Lagrangefunktion eines Teilchen mit Koordinate $q \in \mathbb{R}$ in einer Dimension sei gegeben durch den allgemeinen Ausdruck

   $$L = a(q, t)\dot{q}^2 + b(q, t)\dot{q} + c(q, t) \qquad \text{mit} \qquad a(q, t) > 0.$$

   a) Verwenden Sie die Relation

   $$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p(q, \dot{q}, t)$$

   und lösen Sie diese nach $\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$ auf.

   b) Verwenden Sie die Legendretransformation um die Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ in die Hamiltonfunktion $H(q, p, t)$ zu transformieren.

   c) Können Sie die Legendretransformation auch ausführen, wenn die Lagrangefunktion von $\dot{q}^3$ abhängen würde?

3. **Geschwindigkeitsabhängige Kraft**

Die Lagrangefunktion eines Teilchen in zwei Dimensionen sei gegeben durch

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{QB}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

a) Berechnen Sie die generalisierten Impulse p_x und p_y. Worin unterscheiden sich diese vom mechanischen Impuls $m\dot{x}$ und $m\dot{y}$?

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen in kartesischen Koordinaten x, y. Handelt es sich bei p_x oder p_y um Erhaltungsgrößen?

c) Zeigen Sie, dass die folgenden Trajektorien die Bewegungsgleichungen lösen

$$x(t) = C_1 \sin\left(\frac{QB}{m}t + \phi_0\right) + C_2$$
$$y(t) = C_1 \cos\left(\frac{QB}{m}t + \phi_0\right) + C_3,$$

wobei ϕ_0, C_1, C_2, C_3 Konstanten sind. Welches physikalische System wird hier beschrieben?

d) Transformieren Sie die Lagrangefunktion auf Polarkoordinaten (r, φ). Berechnen Sie die generalisierten Impulse p_r und p_φ und identifizieren Sie, welche der Polarkoordinaten (r, φ) zyklisch sind.

4. **Eichinvarianz der Lagrangefunktion**

Zwei Lagrangefunktionen seien gegeben durch

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{QB}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \qquad \text{und} \qquad \tilde{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + QBx\dot{y}.$$

a) Zeigen Sie, dass sich die beiden Lagrangefunktionen nur um die totale Zeitableitung $\frac{d}{dt}F(x, y)$ einer Funktion $F(x, y)$ unterscheiden. Wie lautet $F(x, y)$?

b) Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen, dass beide Lagrangefunktionen zu identischen Bewegungsgleichungen führen und daher das selbe System beschreiben.

c) Berechnen Sie für die beiden Lagrangefunktionen L und $\tilde{L}$ den Ausdruck

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{y} - L \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{y}}\dot{y} - \tilde{L}.$$

Worum handelt es sich bei dieser Größe? Ist diese eine Erhaltungsgröße?

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1/2/3ab/3cd/4ab/4c