2. KURZPLENUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 7.12.2020

2

2.1 PUNKTMASSE IM ZENTRALPOTENTIAL

Ein Massepunkt bewege sich in einem Zentralpotential $V(r)$. Die zugehörige Lagrange-Funktion lautet:

$$L(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta},\phi,\dot{\phi}) = T - V = \frac{m}{2}\Big[\dot{r}^2 + r^2\big(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2(\theta)\big)\Big] - V(r) \qquad (2.1)$$

a) Gibt es zyklische Koordinaten? Was folgt aus deren Existenz?

b) Berechnen Sie einen Ausdruck für die Gesamtenergie des Systems mit folgenden Argumenten $E(r,p_r,\theta,p_\theta,\phi,p_\phi)$ indem Sie die Zeit t als zusätzlichen Freiheitsgrad betrachten und weiters ausnutzen dass die Lagrange-Funktion nicht explizit zeitabhängig ist.

Lösung:

Die Lagrange-Funktion ist unabhänging von ϕ. Es handelt sich daher um eine zyklische Koordinate, sprich $\partial L/\partial\phi = 0$. Aus der Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \qquad (2.2)$$

folgt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \text{const.} \qquad (2.3)$$

Dieser Ausdruck ist der zu ϕ konjugierte, generalisierte Impuls p_ϕ und stellt in diesem System eine Erhaltungsgröße dar. Wie Sie in Zukunft noch oft hören werden ist die Existenz einer solchen Erhaltungsgröße eng mit einer kontinuierlichen Symmetrie des Systems verbunden. Unser Zentralpotential ist offensichtlich sphärisch symmetrisch und der Drehimpuls in ϕ Richtung ist damit wie erwartet erhalten.

Wie Ihnen bereits in der Vorlesung gezeigt wurde können Sie Systeme mit nicht explizit zeitabhängigen Lagrangefunktionen auch als zyklisch in der Zeit $t \coloneqq q_{f+1}$ betrachten und damit die Gesamtenergie des Systems als weitere Erhaltungsgröße in folgender Form identifizieren:

$$E = \dot{r}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}} + \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} + \dot{\phi}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - L \qquad (2.4)$$

Die konjugierten Impulse (partielle Ableitungen in Eq. 2.4) lassen sich direkt bestimmen und nach den generalisierten Geschwindigkeiten auflösen:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \rightarrow \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m} \tag{2.5}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \tag{2.6}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2(\theta)\dot{\phi} \quad \rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2(\theta)} \tag{2.7}$$

Diese Ausdrücke erlauben es uns nun wie gefordert die Abhängigkeit von allen drei Geschwindigkeiten wegzutransformieren $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \rightarrow (p_r, p_\theta, p_\phi)$.

$$E = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\phi}p_\phi - L(r, \dot{r}(p_r), \theta, \dot{\theta}(p_\theta), \phi, \dot{\phi}(p_\phi)) \tag{2.8}$$

Wir erhalten:

$$E(r, p_r, \theta, p_\theta, \phi, p_\phi) = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2(\theta)} + V(r) \tag{2.9}$$