4. KURZPLENUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 11.01.2021

4

4.1 WIEDERHOLUNG - POISSONKLAMMERN, GENERATOREN, NOETHER THEOREM

Zeitentwicklung einer physikalischen Observable $O(q, p, t)$ formuliert mit *Poissonklammern*:

$$\frac{dO}{dt} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial O}{\partial q_i} \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial t}}_{\frac{\partial H}{\partial p_i}} + \frac{\partial O}{\partial p_i} \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial t}}_{-\frac{\partial H}{\partial q_i}} \right) + \frac{\partial O}{\partial t} = \{O, H\} + \frac{\partial O}{\partial t} \tag{4.1}$$

Im Hamilton-Formalismus wird die Zeitentwicklung des Systems

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\eta}(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\nu}_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

durch ein von der Hamiltonfunktion $H(q, p)$ generiertes Vektorfeld $\boldsymbol{\nu}_H$ beschrieben. Integration über infinitesimal kurze Zeit Δt gibt:

$$\boldsymbol{\eta}(t + \Delta t) = \boldsymbol{\eta}(t) + \boldsymbol{\nu}_H \Delta t \tag{4.3}$$

Die Hamiltonfunktion H ist somit der *Generator von Zeit-Translationen*.

Eine beliebige Funktion $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ der Phasenraum Koordinaten kann ebenso eine Transformation

$$\frac{dO}{d\epsilon} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial O}{\partial q_i} \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial \epsilon}}_{\frac{\partial f}{\partial p_i}} + \frac{\partial O}{\partial p_i} \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial \epsilon}}_{-\frac{\partial f}{\partial q_i}} \right) + \frac{\partial O}{\partial \epsilon} = \{O, f\} + \frac{\partial O}{\partial \epsilon} \tag{4.4}$$

$$\frac{d}{d\epsilon}\boldsymbol{\eta} = \frac{d}{d\epsilon}\begin{pmatrix} \mathbf{q}(\epsilon) \\ \mathbf{p}(\epsilon) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\nu}_f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \\ -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

"generieren". Wir können wieder die Auswirkung einer kleinen Variation an einem jetzt allgemeineren Parameter ϵ (vorher t) auf den Phasenraum ganz analog anschreiben:

$$\boldsymbol{\eta}(\epsilon + \Delta\epsilon) = \boldsymbol{\eta}(\epsilon) + \boldsymbol{\nu}_f \Delta\epsilon \tag{4.6}$$

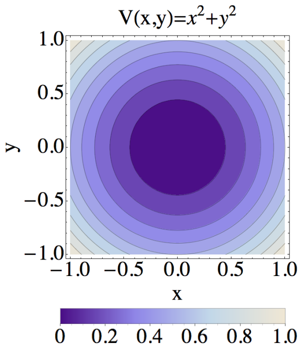
Die Poissonklammern erlauben auch eine elegante Formulierung des Noether Theorems. Wir starten bei Gl. 4.1 und gehen davon aus dass $O(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ nicht explizit zeitabhängig ist und eine Erhaltungsgröße des Systems sei:

$$\frac{dO}{dt} = \{O, H\} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{O ist erhalten bei Zeittranslationen generiert durch H!} \tag{4.7}$$

Da die Poissonklammern aber per Definition (anti)-symmetrisch in den beiden Argumenten sind können wir auch die Änderung von H durch eine von O generierte Variation der Phasenraum Koordinaten ($\boldsymbol{\nu}_O$) betrachten:

$$\frac{dH}{d\epsilon} = \{H, O\} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{H ist invariant unter der von O generierten Transformation!} \tag{4.8}$$

Wir haben somit elegant formuliert dass jede Erhaltungsgröße $O(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ eines Systems zwingend mit einer das System nicht verändernden, kontinuierlichen (geometrischen oder dynamischen) Symmetrietransformation $\boldsymbol{\nu}_O$ (generiert durch O) einhergeht (und umgekehrt!)



Isotroper Harmonischer Oszillator in 2D:

$$H(x, y, px, py) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \tag{4.9}$$

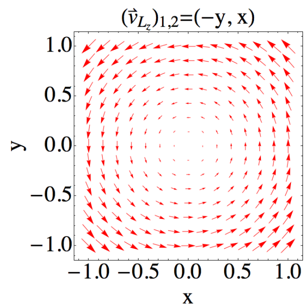
Betrachten wir beispielsweise die z-Komponente des Drehimpulses

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := L_z = x p_y - y p_x \tag{4.10}$$

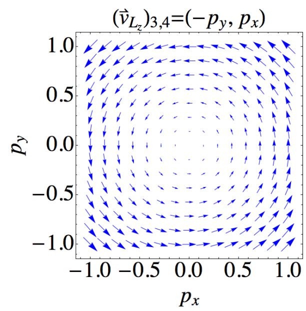
können wir die dadurch generierte Transformation einfach bestimmen:

$$\boldsymbol{\nu}_{L_z}(x, y, p_x, p_y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L_z}{\partial p_x} \\ \frac{\partial L_z}{\partial p_y} \\ -\frac{\partial L_z}{\partial x} \\ -\frac{\partial L_z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ -p_y \\ p_x \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \epsilon} = \boldsymbol{\nu}_{L_z} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{d\epsilon}\begin{pmatrix} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ -p_y \\ p_x \end{pmatrix} \tag{4.12}$$



Konfigurationsraum Komponenten von $\boldsymbol{\nu}_{L_z}$



Impulsraum Komponenten von $\boldsymbol{\nu}_{L_z}$

Da das System an Differentialgleichungen in zwei entkoppelte und idente Gleichungssysteme für Orte und Impulse zerfällt konzentrieren wir uns im Folgenden nur auf die Orte (das weitere Vorgehen funktioniert analog für die Impulskomponenten von $\boldsymbol{\eta}$). Wir transformieren durch Ableiten einer Zeile und Einsetzen der Anderen auf eine DGL 2.Ordnung und machen den typischen Ansatz:

$$\frac{d^2 y}{d\epsilon^2} = -y \quad \longrightarrow \quad y(\epsilon) := A\cos(\epsilon) + B\sin(\epsilon) \tag{4.13}$$

$$x = \frac{dy}{d\epsilon} \quad \longrightarrow \quad x(\epsilon) := -A\sin(\epsilon) + B\cos(\epsilon) \tag{4.14}$$

Betrachten wir jetzt eine kleine Änderung von $\epsilon \to \epsilon + \Delta\epsilon$ ergibt sich unter Anwendungen trigonometrischer Additionstheoreme:

$$x(\epsilon + \Delta\epsilon) = \cos(\Delta\epsilon)x(\epsilon) - \sin(\Delta\epsilon)y(\epsilon) \tag{4.15}$$

$$y(\epsilon + \Delta\epsilon) = \sin(\Delta\epsilon)x(\epsilon) + \cos(\Delta\epsilon)y(\epsilon) \tag{4.16}$$

Das heißt die z-Komponente des Drehimpulses ist offensichtlich der Generator von Rotationen um die z-Achse!

$$\begin{pmatrix} x(\epsilon+\Delta\epsilon) \\ y(\epsilon+\Delta\epsilon) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Delta\epsilon) & -\sin(\Delta\epsilon) \\ \sin(\Delta\epsilon) & \cos(\Delta\epsilon) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(\epsilon) \\ y(\epsilon) \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

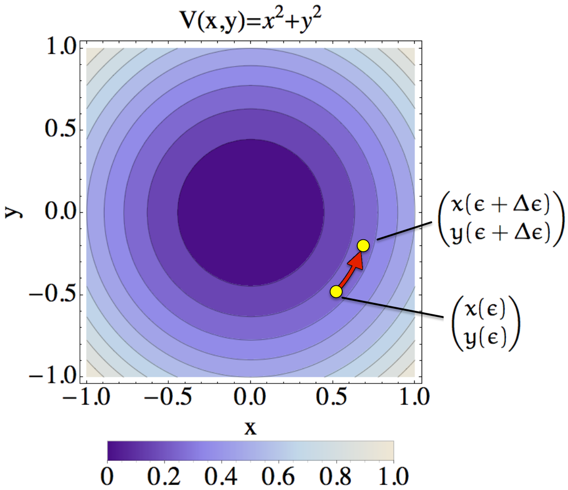


FIGURE 4.1: *Schematische Darstellung der von L_z generierten Drehung. ϵ wirkt hier (ähnlich zu t bei Zeitentwicklung) als Parameter der die Drehung kontrolliert.*

Da wir wissen dass es sich in diesem System bei L_z um eine Erhaltungsgröße handelt können wir abschließend das Noether Theorem zeigen und überprüfen ob die von L_z generierte Transformation

$$x(\epsilon+\Delta\epsilon) = \cos(\Delta\epsilon)x(\epsilon) - \sin(\Delta\epsilon)y(\epsilon) \tag{4.18}$$
$$y(\epsilon+\Delta\epsilon) = \sin(\Delta\epsilon)x(\epsilon) + \cos(\Delta\epsilon)y(\epsilon) \tag{4.19}$$
$$p_x(\epsilon+\Delta\epsilon) = \cos(\Delta\epsilon)p_x(\epsilon) - \sin(\Delta\epsilon)p_y(\epsilon) \tag{4.20}$$
$$p_y(\epsilon+\Delta\epsilon) = \sin(\Delta\epsilon)p_x(\epsilon) + \cos(\Delta\epsilon)p_y(\epsilon) \tag{4.21}$$

die Hamiltonfunktion invariant lässt:

$$\begin{aligned} H(\epsilon+\Delta\epsilon) = \\ &\frac{p_x(\epsilon+\Delta\epsilon)^2 + p_y(\epsilon+\Delta\epsilon)^2}{2m} + \frac{m\omega}{2}\left(x(\epsilon+\Delta\epsilon)^2 + y(\epsilon+\Delta\epsilon)^2\right) = \\ &\left(\frac{p_x(\epsilon)^2 + p_y(\epsilon)^2}{2m} + \frac{m\omega}{2}\left(x(\epsilon)^2 + y(\epsilon)^2\right)\right)\left(\cos(\Delta\epsilon)^2 + \sin(\Delta\epsilon)^2\right) = \\ &\frac{p_x(\epsilon)^2 + p_y(\epsilon)^2}{2m} + \frac{m\omega}{2}\left(x(\epsilon)^2 + y(\epsilon)^2\right) \\ &= H(\epsilon) \end{aligned} \tag{4.22}$$

Wie erwartet bleibt der isotope 2D Oszillator unverändert bei Anwendung einer Drehung.