LÖSUNG ZUM 1. TEST ANALYTISCHE MECHANIK VU, 03.02.2021

1 DER INVERTIERTE HARMONISCHE OSZILLATOR (20 PUNKTE)

Wir betrachten die folgende Hamiltonfunktion in einer Dimension mit kanonischer Ortskoordinate q und konjugiertem Impuls p,

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2}. \tag{1}$$

Alle Konstanten wurden 1 gesetzt, um Ihnen Rechenarbeit zu ersparen.

a) Wie lauten die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen? Wenden Sie sie explizit auf Gleichung (1) an. (*keine Lösung der Bewegungsgleichungen erforderlich*) (3 Punkte)

Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen für $H(x,p)$ lauten

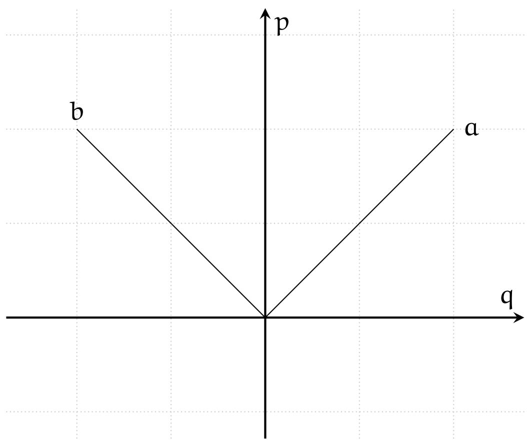
$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \tag{2}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = x \tag{3}$$

b) Betrachten Sie folgende Koordinatentransformation:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(p+q), \qquad b = \frac{1}{\sqrt{2}}(p-q) \tag{4}$$

Zeichnen Sie (a,b) Achsen in ein Diagramm der $q-p$ Ebene. Was für eine geometrische Transformation stellt Gleichung (4) dar? (4 Punkte)



Es handelt sich um eine Drehung um 45 Grad.

c) Beweisen Sie mit Hilfe der Poisson Klammern, dass die Transformation $(q,p) \to (a,b)$ kanonisch ist! (3 Punkte)

$$\{a_+, a_-\} = \frac{1}{2}\left[\{p,p\} - \{p,q\} + \{q,p\} + \{q,q\}\right] = \frac{1}{2}[0-(-1)+1+0] = 1 \tag{5}$$

$$\{a_+, a_+\} = \frac{1}{2}\left[\{p,p\} + \{p,q\} + \{q,p\} + \{q,q\}\right] = \frac{1}{2}[0+(-1)+1+0] = 0 \tag{6}$$

$$\{a_-, a_-\} = \frac{1}{2}\left[\{p,p\} - \{p,q\} - \{q,p\} + \{q,q\}\right] = \frac{1}{2}[0-(-1)-1+0] = 0 \tag{7}$$

d) Wie lautet H ausgedrückt in den transformierten Koordinaten $H(a, b)$? (3 Punkte)

Invertieren liefert

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b), \qquad q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b) \tag{8}$$

Einsetzen somit

$$H = \frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2) - \frac{1}{4}(a^2 - 2ab + b^2) = ab$$

e) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für die neuen Koordinaten da/dt, db/dt mit Hilfe der Poisson Klammern. (3 Punkte)

$$\frac{d}{dt}a = \{a, H\} = \{a, ab\} = a$$

sowie

$$\frac{d}{dt}b = \{b, H\} = \{b, ab\} = -b$$

f) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für $a(t)$ und $b(t)$ für die Anfangsbedingungen $q(0) = 0$, $p(0) = p_0$. (4 Punkte)

$$a = Ae^t, \qquad b = Be^{-t}$$

Mit Anfangsbedingung $q(t=0) = 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A - B)$, also $A = B$ und $p(t=0) = p_0 = \sqrt{2}A$ ergibt sich

$$a = \frac{p_0}{\sqrt{2}}e^t, \qquad b = \frac{p_0}{\sqrt{2}}e^{-t}$$

2 LIOUVILLE-THEOREM

a) In Worten, was besagt das Liouville'sche Theorem? (5 Punkte)

Das von benachbarten Trajektorien im Phasenraum eingeschlossene (mehrdimensionale) Volumen ist als Funktion der Zeit konstant.

b) Schreiben Sie das Liouville'sche Theorem explizit, ausgedrückt durch das Hamilton'sche Geschwindigkeits-Vektorfeld, an. (*Hinweis: Gauss'scher Integralsatz*) (2 Punkte)

Mit $V = \int d^f p \, d^f q$ ergibt sich

$$\frac{dV}{dt} = \int_{\partial\mathcal{M}} \nu_H \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{M}} \nabla \cdot \nu_H dV = 0$$

da $\nabla \cdot \nu_H = \partial_q \partial_p H - \partial_p \partial_q H = 0$.

c) Bestimmen Sie das Hamilton'sche Geschwindigkeits-Vektorfeld ν_H für die Hamiltonfunktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2}. \tag{9}$$

Berechnen Sie $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nu}_H$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne von Liouville's Theorem. (4 Punkte)

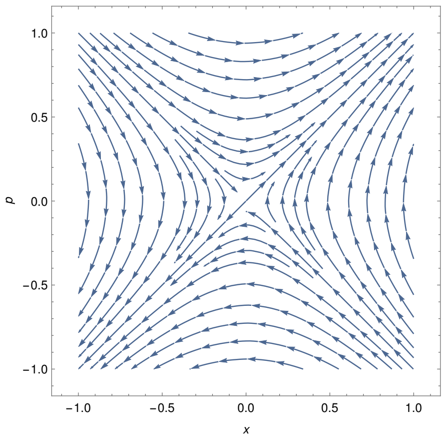
Wir setzen für den konkreten Hamiltonian ein: $\nu_H = (\partial_p H, -\partial_q H) = (p, q)$. In der Tat ist $\nabla \cdot \nu_H = \partial_q p + \partial_p q = 0$. Daher: auch für den konkreten Hamiltonian ist explizit das Liouville-Theorem erfüllt.

d) Skizzieren Sie den Phasenraum (q, p) für Gleichung (9). (*Die Skizze sollte Achsenbeschriftungen, mindestens je einen Vektorpfeil auf der q-Achse, der p-Achse und den beiden Diagonalen enthalten sowie insgesamt zumindest eine "typische" Trajektorie beinhalten.*) (4 Punkte)

Die Skizze von ν_H, also von

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

ist (mit $x \equiv q$)



3 TEILCHEN IM SCHIEFEN POTENTIAL

Die Hamilton-Funktion eines Teilchens der Masse m in 2 Dimensionen laute wie folgt:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + c(x - y), \qquad c, m \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

a) Wie lautet die Lagrange-Funktion des Systems? Führen Sie hierzu eine Legendre-Transformation durch.
Hinweis: Benutzen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen um die Impulse p_x und p_y durch Geschwindigkeiten v_x und v_y zu ersetzen. (5 Punkte)

Aus der Hamilton-BWGL für die Ortskoordinaten folgt:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \qquad \longrightarrow \qquad p_x = m\dot{x} \tag{11}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \qquad \longrightarrow \qquad p_y = m\dot{y} \tag{12}$$

Wir berechnen die Lagrange-Funktion:

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - H(x, p_x(\dot{x}), y, p_y(\dot{y})) \tag{13}$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - c(x - y) \tag{14}$$

b) Ist die Lagrange-Funktion

$$\tilde{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{2\dot{x}y^2}{m} + \dot{y}^2\right) - c(x - y) + x2y\dot{y} \tag{15}$$

mit Ihrem Resultat kompatibel? Durch welche Art von Transformation stehen die beiden Resultate in Verbindung? *Hinweis: Betrachten Sie die Differenz der beiden Lagrange-Funktionen.* (5 Punkte)

Die gegebene Lagrange-Funktion unterscheidet sich von Ihrer um:

$$L_{\text{Kollege}} - L = \dot{x}y^2 + x2y\dot{y} = \frac{d}{dt}\left(xy^2\right) \tag{16}$$

Eine additive totale Zeitableitung ändert an der Dynamik Ihres Systems nichts. Die Lagrangefunktionen lassen sich durch eine Eichtransformation ineinander überführen.

c) Stellen Sie für den Hamiltonian aus Gleichung (10) die Hamilton-Jacobi Gleichung für die Hamilton'sche Prinzipalfunktion $S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, t)$ auf und separieren Sie diese mittels eines geeigneten Separationsansatzes. Geben Sie die getrennten Differentialgleichungen für $W_x(x, \alpha_1, \alpha_2)$ und $W_y(y, \alpha_1, \alpha_2)$ an. (6 Punkte)

Die Hamilton-Jacobi Gleichung für das System lautet:

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right) + c\,(x - y) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{17}$$

Mit dem Separationsansatz

$$S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, t) = W_x(x, \alpha_1, \alpha_2) + W_y(y, \alpha_1, \alpha_2) - Et \tag{18}$$

folgen die getrennten Differentialgleichungen:

$$\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_X}{\partial x}\right)^2 + cx}_{:=\alpha_1} = \underbrace{E - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_y}{\partial y}\right)^2 + cy}_{:=\alpha_1} \tag{19}$$

d) Bestimmen Sie jetzt die Hamilton'sche Prinzipalfunktion $S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, t)$. (4 Punkte)

Wir bestimmen W_x

$$\frac{dW_x}{dx} = \pm\sqrt{2m(\alpha_1 - cx)} \tag{20}$$

$$\longrightarrow W_x = \mp\frac{1}{3mc}(2m(\alpha_1 - cx))^{3/2} \tag{21}$$

und analog W_y

$$\frac{dW_y}{dy} = \pm\sqrt{2m(E - \alpha_1 + cy)} \tag{22}$$

$$\longrightarrow W_y = \pm\frac{1}{3mc}(2m(E - \alpha_1 - cx))^{3/2} \tag{23}$$

Damit ergibt sich die Hamiltonsche Prinzipalfunktion zu

$$S(x, y, \alpha_1, \alpha_2 = E, t) = \mp\frac{(2m)^{3/2}}{3mc}\left((\alpha_1 - cx)^{3/2} - (E - \alpha_1 - cx)^{3/2}\right) - Et \tag{24}$$

4 Anharmonischer Oszillator

Wir betrachten ein Teilchen in einer Dimension mit einer Hamilton-Funktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} + V(q) \quad \text{mit} \quad V(q) = \frac{q^k}{2}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

a) Für welche Werte von $k \in \mathbb{N}$ ist das Teilchen gebunden? *Hinweis: Fertigen Sie eine Skizze des Potentials für verschiedene k an! (Keine Rechnung)* (2 Punkte)

Nur für gerade, positive Werte von k.

b) Bestimmen Sie für allgemeines $k \in \mathbb{N}$ einen Zusammenhang zwischen der mittleren potentiellen und der mittleren kinetischen Energie eines gebundenen Teilchens. (1 dimensionales Problem) Welches Theorem haben Sie gerade abgeleitet? *Hinweis: Das Zeitmittel der Größe $d(pq)/dt$ strebt für gebundene Zustände gegen Null.* (5 Punkte)

Das Virialtheorem

$$G = p \cdot q \tag{26}$$

$$\frac{dG}{dt} = \dot{p} \cdot q + p \cdot \dot{q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} q + p \cdot \frac{p}{m} \tag{27}$$

$$= -kV(q) + 2T \tag{28}$$

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt = \frac{1}{\tau}(G(\tau) - G(0)) = 0 \tag{29}$$

$$\langle T \rangle = \frac{k}{2}\langle V \rangle \tag{30}$$

c) Für welchen Wert von k ist die mittlere kinetische Energie gleich der mittleren potentiellen Energie? (2 Punkte)

für $k = 2$

d) Für welche Werte von k ist die Schwingungsperiode der Bewegung unabhängig von den Anfangsbedingungen? (mit Begründung!) (3 Punkte)

Für $k = 2$ ergibt sich bei Reskalierung $\beta = \lambda^{1-k/2} = \lambda^0 = 1$, also keine Reskalierung der Zeit. Insofern ergibt sich die selbe Lösung für alle Anfangsbedingungen. Alternativ: für $k = 2$ erhalten wir den harmonischen Oszillator, dessen Frequenz unabhängig von der Anfangsbedingung ist.

e) Es sei die Lösung der Bewegungsgleichungen $q(t)$ eines Teilchens mit der Hamiltonfunktion von Gleichung (25) zu den Anfangsbedinungen $q(t=0) = q_0$, $p(t=0) = 0$ bekannt. Wie lautet die Lösung $\bar{q}(t)$ zur Anfangsbedingung $\bar{q}(t=0) = 3q_0$, ausgedrückt durch $q(t)$? *Hinweis: Erinnern Sie sich an das Skalierungsverhalten von Koordinaten und Zeit in der Lagrange-Funktion* L. (3 Punkte)

Skalierung der Lagrangefunktion:

$$L(\lambda q, \lambda/\beta \dot{q}, \beta t) = \lambda^2/\beta^2 T + \lambda^k V$$

somit ist L homogen für $\lambda^{1-k/2} = \beta$, oder $\bar{q}(t) = \lambda q(\lambda^{1-k/2} t)$. Mit $\lambda = 3$ also $\bar{q}(t) = 3q(3^{1-k/2} t)$.