

2.1 TEILCHEN AUF KEGELOBERFLÄCHE (SPHÄRISCHES PENDEL)

a) Die Einheitsvektoren sind gegeben durch

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

und

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Umformen auf $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ gibt:

$$\mathbf{e}_x = \sin(\theta) \cos(\phi) \mathbf{e}_r + \cos(\theta) \cos(\phi) \mathbf{e}_\theta - \sin(\phi) \mathbf{e}_\phi \quad (2.4)$$

$$\mathbf{e}_y = \sin(\theta) \sin(\phi) \mathbf{e}_r + \cos(\theta) \sin(\phi) \mathbf{e}_\theta + \cos(\phi) \mathbf{e}_\phi \quad (2.5)$$

$$\mathbf{e}_z = \cos(\theta) \mathbf{e}_r - \sin(\theta) \mathbf{e}_\theta \quad (2.6)$$

Womit sich (inklusive einiger Umformung) für die Geschwindigkeit ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z = [\dot{x} \sin(\theta) \cos(\phi) + \dot{y} \sin(\theta) \sin(\phi) + \dot{z} \cos(\theta)] \mathbf{e}_r + \\ &\quad [\dot{x} \cos(\theta) \cos(\phi) + \dot{y} \cos(\theta) \sin(\phi) - \dot{z} \sin(\theta)] \mathbf{e}_\theta + \\ &\quad [-\dot{x} \sin(\phi) + \dot{y} \cos(\phi)] \mathbf{e}_\phi = \\ &\quad \vdots \\ &= r_0 \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r_0 \sin(\theta) \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (2.7)$$

Analoges Vorgehen liefert den gewünschten Ausdruck für die Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{x} \mathbf{e}_x + \ddot{y} \mathbf{e}_y + \ddot{z} \mathbf{e}_z = \\ &\quad \vdots \\ &= r_0 [\ddot{\theta}^2 - \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2] \mathbf{e}_r + r_0 [\ddot{\theta} - \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2] \mathbf{e}_\theta + r_0 [\ddot{\phi} \sin(\theta) + 2\dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta)] \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (2.8)$$

2

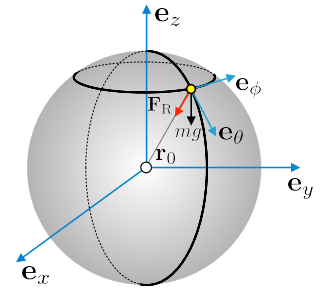


FIGURE 2.1: Sphärisches Pendel

b) Die kinetische Energie ist

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2} \left(r_0 \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r_0 \dot{\phi} \sin(\theta) \mathbf{e}_\phi \right)^2 = \\ &= \frac{m}{2} \left(r_0^2 \dot{\theta}^2 + r_0^2 \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

wobei $\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\phi = 0$ und $\mathbf{e}_\theta^2 = \mathbf{e}_\phi^2 = 1$ ausgenutzt wurde. Die Lagrange-funktion lautet daher

$$L(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2} \left(r_0^2 \dot{\theta}^2 + r_0^2 \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) \right) - mgr_0 \cos(\theta) \quad (2.10)$$

c) Die Newton'sche Bewegungsgleichung mit Zwangskraft \mathbf{F}^R in kartesischen Koordinaten lautet

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{e}_z + \mathbf{F}^R \quad (2.11)$$

Projektion auf den Einheitsvektor \mathbf{e}_θ ergibt

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_\theta = -mg\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\theta + \mathbf{F}^R \cdot \mathbf{e}_\theta. \quad (2.12)$$

Mithilfe von

$$\mathbf{F}^R \cdot \mathbf{e}_\theta = 0 \quad (2.13)$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\theta = -\sin(\theta) \quad (2.14)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_\theta = r_0 [\ddot{\theta} - \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2] \quad (2.15)$$

erhält man die Bewegungsgleichung

$$r_0 \ddot{\theta} = r_0 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 + g \sin(\theta). \quad (2.16)$$

Projektion auf den Einheitsvektor \mathbf{e}_ϕ ergibt

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_\phi = -mg\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\phi + \mathbf{F}^R \cdot \mathbf{e}_\phi. \quad (2.17)$$

Mithilfe von

$$\mathbf{F}^R \cdot \mathbf{e}_\phi = 0 \quad (2.18)$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\phi = 0 \quad (2.19)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_\phi = r_0 [\ddot{\phi} \sin(\theta) + 2\dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta)] \quad (2.20)$$

erhält man die Bewegungsgleichung

$$r_0 \sin(\theta) \ddot{\phi} + 2r_0 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{\phi} = 0 \quad (2.21)$$

d) Die Euler-Lagrange Gleichung für θ lautet:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = mr_0^2 \ddot{\theta} - mr_0^2 \dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + mgr_0 \sin(\theta) = 0 \quad (2.22)$$

Die Euler-Lagrange Gleichung für ϕ lautet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= \frac{d}{dt} \underbrace{\left(mr_0^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi} \right)}_{\text{Drehimpuls um z-Achse}} = \\ &= mr_0^2 \ddot{\phi} \sin^2(\theta) + mr_0^2 2\dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Kürzen der gemeinsamen Faktoren gegen 0 liefert Übereinstimmung mit c).

2.2 PRINZIP DER KLEINSTEN WIRKUNG

a) Die Gesamtlaufzeit ist

$$T = \frac{\sqrt{L^2 + h^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{L^2 + (H-h)^2}}{v_2}. \quad (2.24)$$

Minimieren nach h führt auf

$$\frac{\partial T}{\partial h} = 0 = \frac{1}{v_1} \frac{h}{\sqrt{L^2 + h^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{(H-h)}{\sqrt{L^2 + (H-h)^2}} \quad (2.25)$$

$$\frac{\sin \Theta_1}{\sin \Theta_2} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (2.26)$$

Das Licht läuft im schnelleren Medium eine längere Strecke.

b) Impulserhaltung $p_y = mv_1 \sin \Theta_1 = mv_2 \sin \Theta_2$ führt auf

$$\frac{\sin \Theta_1}{\sin \Theta_2} = \frac{v_2}{v_1}. \quad (2.27)$$

Die Wirkung, mit $v_{1,2} = s_{1,2}/t_{1,2}$ und $t_2 = T - t_1$ ist

$$\mathcal{S}[q(t_1)] = \int_0^{t_1} \left(\frac{m}{2} \frac{s_1^2}{t_1^2} - U_1 \right) dt + \int_{t_1}^T \left(\frac{m}{2} \frac{s_2^2}{t_2^2} - U_2 \right) dt. \quad (2.28)$$

Ausführen der Integrale und ableiten nach t_1 führt auf

$$\partial_t \mathcal{S} = 0 = -\frac{m}{2} v_1^2 - U_1 + \frac{m}{2} v_2^2 + U_2, \quad (2.29)$$

womit wir die Energieerhaltung $E = mv^2/2 + U$ hergeleitet haben. Umformen gibt

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{1 + \frac{U_2 - U_1}{E - U_2}}. \quad (2.30)$$

Das Teilchen läuft mit schnellerer Geschwindigkeit die kürzere Strecke – es verbringt in $L = T - U$ lieber mehr Zeit dort wo $-U$ ihm "viel bringt".

2.3 SPIRALBEWEGUNG

a) Die Zwangsbedingung ist charakterisiert durch

$$f(x, y, t) = x^2 + y^2 - (l_0 - c\sqrt{t})^2 = 0. \quad (2.31)$$

Dabei handelt es sich um eine rheonome holonome Zwangsbedingung.

b) Das System hat einen Freiheitsgrad. Bei φ handelt es sich um eine geeignete generalisierte Koordinate da die Zwangsbedingung

$$f(x(\varphi, t), y(\varphi, t), t) = (l_0 - c\sqrt{t})^2 - (l_0 - c\sqrt{t})^2 = 0 \quad (2.32)$$

für alle Werte $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und alle Zeiten t erfüllt ist.

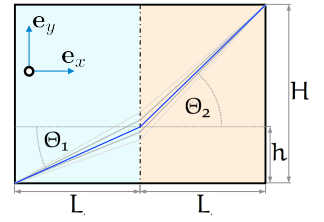


FIGURE 2.2: Ein Teilchen durchläuft das Rechteck mit zwei verschiedenen Geschwindigkeiten im linken und rechten Teil.

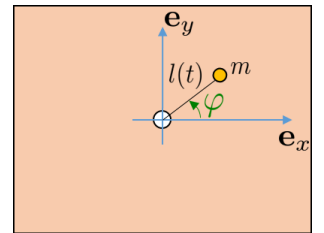


FIGURE 2.3: Ein Teilchen wird durch den Tisch gezogen.

c) Die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (2.33)$$

ist mit

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial x}{\partial t} = -(l_0 - c\sqrt{t}) \sin(\varphi) \dot{\varphi} - \frac{c}{2\sqrt{t}} \cos(\varphi) \quad (2.34)$$

und

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial y}{\partial t} = (l_0 - c\sqrt{t}) \cos(\varphi) \dot{\varphi} - \frac{c}{2\sqrt{t}} \sin(\varphi) \quad (2.35)$$

gegeben durch

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} \left((l_0 - c\sqrt{t})^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{c^2}{4t} \right). \quad (2.36)$$

Da es keine potentielle Energie gibt ist die Lagrangefunktion gegeben durch

$$L = T = \frac{m}{2} \left((l_0 - c\sqrt{t})^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{c^2}{4t} \right) \quad (2.37)$$

und die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m \frac{d}{dt} \left[(l_0 - c\sqrt{t})^2 \dot{\varphi} \right] = 0 \quad (2.38)$$

führt auf

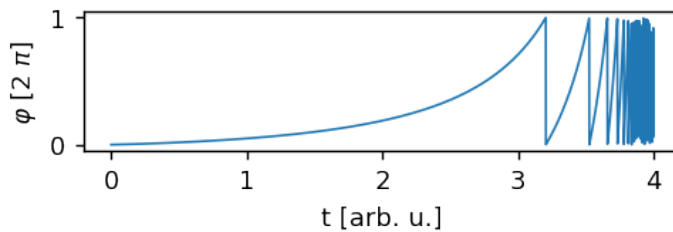
$$(l_0 - c\sqrt{t})^2 \dot{\varphi} = \text{const} = l_0^2 \omega_0. \quad (2.39)$$

Integration der Gleichung liefert

$$\dot{\varphi} = \frac{l_0^2 \omega_0}{(l_0 - c\sqrt{t})^2} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \varphi(t) &= \int_0^t \frac{l_0^2 \omega_0}{(l_0 - c\sqrt{t'})^2} dt' = \frac{2l_0^2 \omega_0}{c^2} \int_{l_0}^{l(t)} \frac{l' + l_0}{l'^2} dl' \\ &= \frac{2l_0^2 \omega_0}{c^2} \left(\ln(|l_0 - c\sqrt{t}|) + \frac{l_0}{l_0 - c\sqrt{t}} - \ln(l_0) - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

d) Das Teilchen bewegt sich auf einer Spiralbahn zum Loch. Aufgrund der Drehimpulserhaltung (explizit sichtbar in der Euler-Lagrange Gleichung) und der immer kürzer werdenden Seillänge erhöht sich zwingend die Winkelgeschwindigkeit des Teilchens (ein voller Umlauf von 2π dauert immer kürzer):



2.4 YUKAWA-POTENTIAL IN ZWEI DIMENSIONEN

a) Die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (2.42)$$

ist mit

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \cos(\varphi) \dot{r} - r \sin(\varphi) \dot{\varphi} \quad (2.43)$$

und

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \sin(\varphi) \dot{r} + r \cos(\varphi) \dot{\varphi} \quad (2.44)$$

gegeben durch

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2). \quad (2.45)$$

Mit der potentiellen Energie

$$V(r) = -\alpha q^2 \frac{e^{-\beta m r}}{r} \quad (2.46)$$

ist die Lagrangefunktion gegeben durch

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \alpha q^2 \frac{e^{-\beta m r}}{r} \quad (2.47)$$

und die Euler-Lagrange Gleichungen sind

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m \ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 + \alpha q^2 \frac{e^{-\beta m r}}{r} \left(\frac{1}{r} + m \beta \right) = 0 \quad (2.48)$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} [m r^2 \dot{\varphi}] = 0 \quad (2.49)$$

b) Der Drehimpuls

$$L = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \quad (2.50)$$

ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$L = m r^2 \dot{\varphi} \quad (2.51)$$

und damit eine Erhaltungsgröße, wie aus der Euler-Lagrange Gleichung für φ folgt.

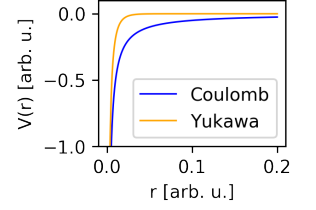


FIGURE 2.4: Vergleich von Yukawa- und Coulomb Potential