3. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 14.12.2020

3

3.1 ZYKLISCHE KOORDINATEN

Ein Schlitten mit Masse m_1 gleite reibungsfrei auf einem waagrechten Führungsholm und sei beidseitig mit Rückstellfedern (jeweils Federkonstante k) ausgestattet. An dem Schlitten hängt ein Pendel der Länge l mit Punktmasse m_2. Es wirke die Gravitationskraft $\mathbf{F}_G = -m_2 g \mathbf{e}_y$.

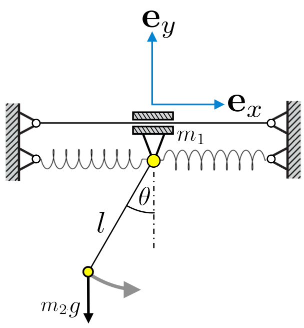

FIGURE 3.1: *Pendel auf Federschlitten*

a) Wieviele Freiheitsgrade besitzt das System? Identifizieren Sie geeignete generalisierte Koordinaten und berechnen Sie die Lagrangefunktion.

b) Berechnen Sie die generalisierten Impulse p_θ und p_x.

c) Identifizieren Sie zunächst alle zyklischen Koordinaten des Systems und erklären Sie die dazugehörenden Erhaltungsgrößen. Wiederholen Sie ihre Analyse für den Grenzfall $k \to 0$ (beliebig schwache Rückstellfedern).

d) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems und zeigen Sie dass diese für kleine Auslenkungen ($\theta \ll 1$) in folgende Form gebracht werden können:

$$a\ddot{x} + bx = f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$$
$$a'\ddot{\theta} + b'\theta = f'(x, \dot{x}, \ddot{x})$$

(a, b, a', b' seien konstante Koeffizienten)

3.2 EICHINVARIANZ DER LAGRANGEFUNKTION

Galileio Galilei sitzt im Lagerraum eines Schiffes und führt Experimente durch. Er betrachtet ein freies Teilchen mit der Lagrangefunktion

$$L = \frac{mv^2}{2} \tag{3.1}$$

Das Galileische Relativitätsprinzip verlangt dass Sie von außen die selbe Physik beschreiben, obwohl sich das Schiff mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{V}$ an Ihnen vorbei bewegt. Das Teilchen hat von außen betrachtet die Geschwindigkeit $\vec{v} + \vec{V}$.

a) Schreiben Sie "Ihre" Lagrangefunktion L' an (ohne das Bezugssystem zu wechseln) und zeigen Sie, dass $L' = L + dF/dt$, und bestimmen Sie F.

BONUS) (mit *(a)* gekreuzt) Argumentieren Sie, warum für ein freies Teilchen $L(x_i, v_i, t) = L(v^2) = mv^2/2$ sein *muss*. (Warum ist L keine Funktion von $\vec{v}$, oder von $\vec{x}$ oder t? Warum nicht $L = mv^3/2$?)

3.3 LEGENDRE TRANSFORMATION

Bestimmen Sie durch eine Legendre Transformation $\dot{q}_i \to p_i$ der Lagrangefunktion die Hamiltonsche Funktion für folgende Systeme. *Tipp: Memorieren Sie das "Rezept" für die Zukunft.*

a) Die Lagrangefunktion für ein Fadenpendel der länge l, Masse m, im homogenen Gravitationsfeld g mit Auslenkung Θ ist gegeben durch

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\Theta}^2 + mgl\cos\Theta. \tag{3.2}$$

b) Die Lagrangefunktion eines Teilchens mit Masse m im elektromagnetischen Feld $(\Phi, \vec{A})$ sei gegeben durch

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\Phi(\vec{r}, t) + q\dot{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r}, t). \tag{3.3}$$

3.4 ZEITABHÄNGIGE DYNAMIK

Ein Gummibärli der Masse m rutscht (reibungsfrei) entlang des Buchdeckels Ihres Analytische-Mechanik Skriptes hinab. Der Buchdeckel ist beschrieben durch $z(x) = x \tan\alpha_0$, mit Winkel $\alpha_0 = \text{const}$.

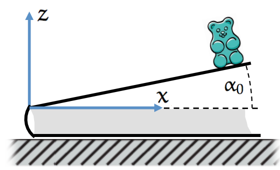

FIGURE 3.2: *Gummibär auf Ihrem Skript*

a) Schreiben Sie die kinetische und potentielle Energie des Gummibärli als Funktion der Position und der Geschwindigkeit an. Wählen Sie dabei eine geeignete generalisierte Koordinate.

b) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion explizit als Legendre-Transformierte der Lagrangefunktion, und zeigen Sie, dass Sie die Energie des Teilchens $E = T + V$ erhalten.

c) Während das Gummibärli hinunterrutscht klappt nun jemand den Buchdeckel auf, gegeben durch ein explizit zeitabhängiges $\alpha(t)$. (Vernachlässigen Sie hier, dass das Gummibärli bei schneller Bewegung "abheben" würde, es bleibt immer auf dem Buchdeckel). Bestimmen Sie wieder die kinetische und potentielle Energie sowie die Hamiltonfunktion, und zeigen Sie, dass in diesem Fall die Hamiltonfunktion nicht mehr der totalen Energie des Systems entspricht.

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
3.1a-b / 3.1c-d / 3.2 / Bonus / 3.3a / 3.3b / 3.4