

3.1 ZYKLISCHE KOORDINATEN

- a) Einschränkung der Masse m_1 auf horizontale Bewegung, sowie des Relativabstands der zwei Punktmassen (Pendellänge l) resultiert in zwei verbleibenden Freiheitsgraden. Wenn man das System durch die Auslenkung des Schlittens (x) und den Winkel des Pendels zum Lot (θ) wie in der Abbildung beschreibt lassen sich die Positionen ($\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$) und Geschwindigkeiten ($\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2$) der beiden Massen wie folgt angeben:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x - l \sin(\theta) \\ -l \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} \dot{x} - l \cos(\theta) \dot{\theta} \\ l \sin(\theta) \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Mit kinetischer Energie

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 = \frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 - 2l \dot{x} \dot{\theta} \cos(\theta)) \quad (3.3)$$

und potenzieller Energie (Federsystem und Gravitation)

$$V = \frac{k}{2} (-x)^2 + \frac{k}{2} x^2 - m_2 l g \cos(\theta) = kx^2 - m_2 l g \cos(\theta) \quad (3.4)$$

ergibt sich die Lagrangefunktion zu

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + m_2 l (g - \dot{x} \dot{\theta}) \cos(\theta) - kx^2 \quad (3.5)$$

- b) Es gilt:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2) \dot{x} - m_2 l \dot{\theta} \cos(\theta) \quad (3.6)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2 l^2 \dot{\theta} - m_2 l \dot{x} \cos(\theta) \quad (3.7)$$

- c) $k \neq 0$

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + m_2 l (g - \dot{x} \dot{\theta}) \cos(\theta) - kx^2 \quad (3.8)$$

Es gibt keine zyklische Koordinate und daher auch keine Erhaltungsgrößen.

$k = 0$

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + m_2 l (g - \dot{x} \dot{\theta}) \cos(\theta) \quad (3.9)$$

x ist eine zyklische Koordinate und das System ist somit translationss invariant in x -Richtung. Die entsprechende Erhaltungsgröße p_x entspricht dem Gesamtimpuls $(m_1 + m_2)\dot{x} - m_2 l \dot{\theta} \cos(\theta)$ des Systems in x -Richtung.

d) Die Euler-Lagrange Gleichung für θ lautet:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = l\ddot{\theta} - \ddot{x} \cos(\theta) + g \sin(\theta) = 0 \quad (3.10)$$

Die Euler-Lagrange Gleichung für x lautet:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = (m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2 l \ddot{\theta} \cos(\theta) + m_2 l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + 2kx = 0 \quad (3.11)$$

Approximieren der Winkelfunktionen ($\cos \theta \approx 1, \sin(\theta) \approx \theta$) gibt:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + 2kx = m_2 l (\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 \theta) \quad (3.12)$$

$$l\ddot{\theta} + g\theta = \ddot{x} \quad (3.13)$$

Beide Gleichungen entsprechen somit der gewünschten Form. Es handelt sich um ein System gekoppelter nichtlinearer ($\dot{\theta}^2 \theta$ Term) Differentialgleichungen das eine Art erzwungene Schwingung beschreibt.

3.2 EICHINVARIANZ DER LAGRANGEFUNKTION

a) Die "originale" Lagrangefunktion sei $L = mv^2/2$.

$$L' = \frac{m}{2} (\vec{v} + \vec{V})^2 = \frac{m}{2} v^2 + m\vec{v} \cdot \vec{V} + \frac{m}{2} V^2 \quad (3.14)$$

$$= L + \frac{d}{dt} \left(m\vec{r}\vec{V} + \frac{m}{2} V^2 t \right) \quad (3.15)$$

siehe auch Landau & Lifschitz, Mechanik.

b) Aufgrund der Homogenität des Raumes und der Zeit kann die Lagrangefunktion eines freien Teilchens weder vom Ortsvektor \vec{r} noch von der Zeit t abhängen. Aufgrund der Isotropie des Raumes kann die Lagrangefunktion auch nicht von der Richtung der Geschwindigkeit \vec{v} , sondern nur mehr vom Absolutwert v abhängen. Die funktionale Abhängigkeit von v wurde (fast) schon in a) gezeigt – es ist v^2 die einzige Lösung, welche mit einer Galileitransformation kompatibel ist, im Sinne dass eine totale Zeitableitung $d/dt (m\vec{r}\vec{V} + mV^2 t/2)$ eine Galileitransformation bewerkstelligt (siehe Landau & Lifschitz, Mechanik).

Eine Alternativlösung, wenn man die Newtonschen Bewegungsgleichungen als Ausgangspunkt nimmt, wäre zu prüfen welcher aller möglicher Terme $L = a\vec{r}^n, b\vec{v}^m, c\vec{r} \cdot \vec{v}, \dots$ zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen führt.

3.3 LEGENDRE TRANSFORMATION

a)

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \quad (3.16)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}. \quad (3.17)$$

$$\tilde{L}(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta \quad (3.18)$$

$$H(\theta, p_\theta, t) = p_\theta \dot{\theta} - \tilde{L}(\theta, p_\theta, t) \quad (3.19)$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta \quad (3.20)$$

b)

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - q\Phi(\vec{r}, t) + q\dot{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r}, t) \quad (3.21)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m\dot{r}_i + qA_i \rightarrow \dot{r}_i = \frac{p_i - qA_i}{m} \quad (3.22)$$

$$H(r_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{r}_i - \tilde{L}(r_i, p_i, t) \quad (3.23)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \frac{(p_i - qA_i(\vec{r}, t))^2}{2m} + q\Phi(\vec{r}, t) \quad (3.24)$$

3.4 ZEITABHÄNGIGE DYNAMIK

a) Wir wählen die Position auf dem Buchdeckel ξ , mit $x = \xi \cos \alpha$ und $z = \xi \sin \alpha$. Die Potentielle Energie $mgz = mg\xi \sin \alpha$. Für die kinetische Energie

$$\dot{x} = \dot{\xi} \cos \alpha \quad \dot{z} = \dot{\xi} \sin \alpha \quad (3.25)$$

und damit $T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2$. Damit erhalten wir

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 - mg\xi \sin \alpha. \quad (3.26)$$

b) Wir berechnen den generalisierten Impuls $p_\xi = \partial L / \partial \dot{\xi} = m\dot{\xi}$, und somit

$$H = p_\xi \dot{\xi} - \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + mg\xi \sin \alpha = \frac{1}{2m} p_\xi^2 + mg\xi \sin \alpha \quad (3.27)$$

was genau die Energie darstellt.

c) Nunmehr ergibt sich

$$\dot{x} = \dot{\xi} \cos \alpha - \xi \dot{\alpha} \sin \alpha \quad \dot{z} = \dot{\xi} \sin \alpha + \xi \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (3.28)$$

und damit $T = \frac{1}{2}m (\dot{\xi}^2 + \xi^2 \dot{\alpha}^2)$. Die potentielle Energie ist weiterhin $V = mgz = mg\xi \sin \alpha$, auch am generalisierten Impuls ändert sich nichts, $p_\xi = m\dot{\xi}$.

$$H = p_\xi \dot{\xi} - \frac{1}{2}m (\dot{\xi}^2 + \xi^2 \dot{\alpha}^2) + mg\xi \sin \alpha \quad (3.29)$$

$$= \frac{1}{2m} p_\xi^2 - \frac{1}{2}m \xi^2 \dot{\alpha}^2 + mg\xi \sin \alpha \quad (3.30)$$

Das ist aber nicht die Energie des Teilchens $T + V$.