LÖSUNG ZUM 5. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 18.01.2021

5

5.1 DER (HERMANN-BERNOULLI-LAPLACE-PAULI-) RUNGE-LENZ VEKTOR

a)

$$A_i = \frac{1}{m} \underbrace{\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn}}_{\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}} p_j r_m p_n - k\frac{r_i}{r} \tag{5.1}$$

$$= \frac{1}{m}\left(p^2 r_i - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\, p_i\right) - k\frac{r_i}{r} \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial r_m} = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial r_m}\left(p^2 r_i - r_k p_k p_i - mk\frac{r_i}{r}\right) \tag{5.3}$$

$$= \frac{1}{m}\left(\delta_{im}p^2 - p_i p_m\right) + \frac{k}{r}\left(\frac{r_i r_m}{r^2} - \delta_{im}\right) \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial p_m} = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial p_m}\left(p_k p_k r_i - r_k p_k p_i - mk\frac{r_i}{r}\right) \tag{5.5}$$

$$= \frac{1}{m}\left(2r_i p_m - r_k\left(\delta_{im}p_k + p_i\delta_{km}\right)\right) \tag{5.6}$$

$$= \frac{1}{m}\left(2r_i p_m - \delta_{im}\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}\right) - p_i r_m\right) \tag{5.7}$$

$$\{A_i, A_j\} = \frac{1}{m^2}\left(\delta_{im}p^2 - p_i p_m + \frac{mk}{r}\left(\frac{r_i r_m}{r^2} - \delta_i m\right)\right)\left(2r_j p_m - \delta_{jm}\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}\right) - p_j r_m\right) \tag{5.8}$$

$$- \frac{1}{m^2}\left(2r_i p_m - \delta_{im}\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}\right) - p_i r_m\right)\left(\delta_{jm}p^2 - p_j p_m + \frac{mk}{r}\left(\frac{r_j r_m}{r^2} - \delta_j m\right)\right) \tag{5.9}$$

$$\vdots \tag{5.10}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{1}{m^2}\left(-\delta_{ij}p^2 - p^2 r_i p_j + 2p_i p_j\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}\right) + \frac{mk}{r}\left(\frac{r_i r_j\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}\right)}{r^2} - 2r_j p_i + \delta_{ij}\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}\right)\right)\right) \tag{5.11}$$

$$+ \frac{1}{m^2}\left(\delta_{ij}p^2 + p^2 r_j p_i - 2p_i p_j\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}\right) - \frac{mk}{r}\left(\frac{r_i r_j\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}\right)}{r^2} - 2r_i p_j + \delta_{ij}\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}\right)\right)\right) \tag{5.12}$$

$$= \frac{1}{m^2}\left(-p^2(r_i p_j - r_j p_i) + \frac{2mk}{r}(r_i p_j - r_j p_i)\right) \tag{5.13}$$

$$= -\frac{1}{m}\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}\right)(r_i p_j - r_j p_i) \tag{5.14}$$

$$= -\frac{1}{m}\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}\right)\epsilon_{ijk}L_k \tag{5.15}$$

Der LPL-Vektor wird für $1/r$ Potentiale die Bedeutung einer "versteckten" Erhaltungsgröße einnehmen.

5.2 POISSON KLAMMERN ALS "GENERATOREN"

a)

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \exp\left(t\{\bullet, H\}\right)\boldsymbol{\eta}_0 \tag{5.16}$$

Die linke Seite ist für kleine t entwickelt $\boldsymbol{\eta}(t) \approx \boldsymbol{\eta}_0 + t\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathcal{O}(t^2)$. Die rechte Seite ist $(1 + t\{\bullet, H\})\,\boldsymbol{\eta}_0 + \mathcal{O}(t^2) = \boldsymbol{\eta}_0 + t\{\boldsymbol{\eta}_0, H\} + \mathcal{O}(t^2)$. Nun ist aber (Vorlesung, Angabe) $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \{\eta, H\}$, und damit die erste Ordnung gezeigt.

b) Entwickeln der Exponentialfunktion gibt

$$\exp\left(t\{\bullet, H\}\right)\boldsymbol{\eta}_0 = \left(1 + t\{\bullet, H\} + \frac{t^2}{2!}\{\{\bullet, H\}, H\} + \frac{t^3}{3!}\{\{\{\bullet, H\}, H\}, H\} + \dots\right)\boldsymbol{\eta}_0. \tag{5.17}$$

Nun machen wir zuerst die Nebenrechnung

$$\{x, H\} = \frac{p}{m} \tag{5.18}$$

$$\{p, H\} = -m\omega^2 x. \tag{5.19}$$

c) Das setzen wir nun in die Taylorreihe der Exponentialfunktion ein

$$x(t) = x + t\frac{p}{m} + \frac{t^2}{2!}\{p/m, H\} + \dots \tag{5.20}$$

$$= x + t\frac{p}{m} - \frac{t^2}{2!}\omega^2 x - \frac{t^3}{3!}\omega^2\{x, H\} + \dots \tag{5.21}$$

$$= x\left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!} - \dots\right) + \frac{p}{m\omega}\left(\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \dots\right) \tag{5.22}$$

$$= x_0\cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega}\sin(\omega t), \tag{5.23}$$

wobei wir in der letzten Zeile explizit $x \equiv x_0$ und $p \equiv p_0$ benannt haben. Genauso

$$p(t) = p - m\omega^2 x t - \frac{t^2}{2!}\omega^2 p + m\omega^4 \frac{t^3}{3!} x + \frac{t^4}{4!}\omega^4 p \tag{5.24}$$
$$= p_0 \cos(\omega t) - m\omega x_0 \sin(\omega t). \tag{5.25}$$

5.3 KANONISCHE TRANSFORMATION FÜR EIN TEILCHEN IM GRAVITATIONSFELD

a) Eine Möglichkeit zu zeigen, dass eine gegebene Transformation im Phasenraum kanonisch sei ist, dass die kanonischen Relationen (auch fundamentale Poissonklammern genannt)

$$\{\bar{q}_i, \bar{q}_j\} = \{\bar{p}_i, \bar{p}_j\} = 0 \qquad \text{und} \qquad \{\bar{q}_i, \bar{p}_j\} = \delta_{ij} \tag{5.26}$$

auch in den neuen Koordinaten gelten. Im Fall eines Freiheitsgrades entspricht dies den drei Relationen

$$\{\bar{q}, \bar{q}\} = \{\bar{p}, \bar{p}\} = 0 \qquad \text{und} \qquad \{\bar{q}, \bar{p}\} = 1. \tag{5.27}$$

Die beiden Relationen

$$\{\bar{q}, \bar{q}\} = \{-p, -p\} = 0 \quad \text{und} \quad \{\bar{p}, \bar{p}\} = \{q + Ap^2, q + Ap^2\} = 0 \tag{5.28}$$

sind automatisch erfüllt, da die Poissonklammer anti-symmetrisch ist und daher die Poissonklammer zwischen zwei gleichen Größen verschwinden muss. Die zweite Relation ist wegen

$$\{\bar{q}, \bar{p}\} = \{-p, q + Ap^2\} = \{-p, q\} = \{q, p\} = 1 \tag{5.29}$$

ebenfalls erfüllt. Die Transformation ist also kanonisch.

Eine weitere Möglichkeit zu zeigen, dass eine gegebene Transformation im Phasenraum ist kanonisch is zu zeigen, es eine erzeugende Funktion $F_1(q, \bar{q}, t)$ mit

$$p(q, \bar{q}) = \frac{\partial F_1}{\partial q} = -\bar{q} \qquad \text{und} \qquad \bar{p}(q, \bar{q}) = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}} = q + A\bar{q}^2 \tag{5.30}$$

gibt. Aus der ersten Relation folgt

$$F_1 = -\bar{q}q + f(\bar{q}) \tag{5.31}$$

wobei $f(\bar{q})$ noch eine beliebige Funktion von $\bar{q}$ sein kann. Aus der zweiten Relation folgt

$$-\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}} = q - \frac{df}{d\bar{q}} = q + A\bar{q}^2. \tag{5.32}$$

Durch Integration erhält man

$$f(\bar{q}) = -\frac{A}{3}\bar{q}^3 \tag{5.33}$$

und weiters

$$F_1(q, \bar{q}) = -\bar{q}q - \frac{A}{3}\bar{q}^3. \tag{5.34}$$

b) Die Hamiltonfunktion in den neuen Koordinaten ist gegeben durch

$$\bar{H}(\bar{q},\bar{p}) = \frac{1}{2m}p^2 + mg\bar{p} - mgAp^2 = \left(\frac{1}{2m} - mgA\right)\bar{q}^2 + mg\bar{p} \quad (5.35)$$

c) Es gilt

$$\dot{\bar{p}} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}} = 0 \rightarrow \bar{p} = \bar{p}_0 = \text{const} \quad (5.36)$$

und

$$\dot{\bar{q}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}} = mg \rightarrow \bar{q} = mgt + \bar{q}_0. \quad (5.37)$$

Daraus folgt durch Rücktransformation

$$p(q_0, p_0, t) = -mgt + \bar{q}_0 = -mgt + p_0 \quad (5.38)$$

und

$$q(q_0, p_0, t) = \bar{p}_0 - \frac{p^2}{2m^2 g} = q_0 + \frac{p_0^2}{2m^2 g} - \frac{(-mgt + p_0)^2}{2m^2 g} = -\frac{g}{2}t^2 + \frac{p_0}{m}t + q_0 \quad (5.39)$$

5.4 KANONISCHE TRANSFORMATIONEN ÜBEN

a) Invarianz der Poissonklammern ($\{q,p\} = 1$, $\{q,q\} = \{p,p\} = 0$ und $\{Q,P\} = 1$, $\{Q,Q\} = \{P,P\} = 0$) ist notwendig und hinreichend um die angegebene Transformation als kanonisch zu identifizieren. Die trivialen Poissonklammern $\{Q,Q\}$ und $\{P,P\}$ sind dabei ohnehin immer durch die Asymmetrie der Poissonklammer erfüllt. $\{Q,P\} = 1$, lässt sich durch explizites Einsetzen in die Definition der Poisson-Klammern zeigen:

$$\begin{aligned}
\{Q,P\}_{q,p} &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \\
&= \frac{1}{1+\sqrt{q}\cos(p)}\Big(-\sqrt{q}\sin^2(p)\cos(p) + \cos^2(p) + \sqrt{q}\cos^3(p) + \sin^2(p) + 2\sqrt{q}\cos(p)\sin^2(p)\Big) = \\
&= \frac{1}{1+\sqrt{q}\cos(p)}\Big(1 + \sqrt{q}\cos(p)\big[\sin^2(p) + \cos^2(p)\big]\Big) = \\
&= 1
\end{aligned}$$

b) Wenn es sich tatsächlich um eine entsprechende generierende Funktion handelt müssen folgende Relationen erfüllt sein:

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} \quad (5.40)$$

$$P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} \quad (5.41)$$

Erstere Ableitung ergibt:

$$-\frac{\partial F_3}{\partial p} = \frac{\left(e^Q - 1\right)^2}{\cos^2(p)}.$$

Ausgehend von der Definition unserer Transformation (Angabe) lässt sich leicht zeigen, dass $e^Q - 1 = \sqrt{q}\cos(p)$, was einerseits (5.40) direkt beweist und weiter $\frac{\partial F_3}{\partial Q}$ wiefolgt vereinfacht:

$$\frac{\partial F_3}{\partial Q} = 2\left(e^Q-1\right)e^Q \tan(p)\left(1+2\sqrt{q}\cos(p)\right)\tan(p) = 2\left(1+2\sqrt{q}\cos(p)\right)\sqrt{q}\sin(p) = P$$

c) Die Poissonklammern der neuen Koordinaten ergibt:

$$\begin{aligned}\{Q, P\}_{q,p} &= \alpha q^{\alpha-1}\cos(\beta p) q^{\alpha}\beta\cos(\beta p) + q^{\alpha}\beta\sin(\beta p)\alpha q^{\alpha-1}\sin(\beta p) = \\ &= \alpha\beta q^{2\alpha-1}\left[\cos^2(\beta p) + \sin^2(\beta p)\right] = \\ &= \alpha\beta q^{2\alpha-1}\end{aligned}$$

Für $\alpha = 1/2$ und $\beta = 2$ wird die Transformation kanonisch:

$$\begin{aligned}Q &= \sqrt{q}\cos(2p) \\ P &= \sqrt{q}\sin(2p)\end{aligned}$$