

6.1 HALLO HAMILTON-JACOBI. DAS FREIE TEILCHEN

a) Wir berechnen

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = -\frac{m(q - \alpha_1)^2}{2t^2} \quad (6.1)$$

und

$$\frac{\partial S_1}{\partial q} = \frac{m(q - \alpha_1)}{t}. \quad (6.2)$$

b) Wir berechnen

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} = -\alpha_2 \quad (6.3)$$

und

$$\frac{\partial S_2}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha_2}. \quad (6.4)$$

Die Hamilton-Jacobi Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q, \partial S / \partial q, t) \quad (6.5)$$

ist in beiden Fällen für $H = p^2/2m$ und $p = \partial S / \partial q$ erfüllt.

a) Wir berechnen die Lösungen $q(t)$ als

$$\frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} = -\frac{m(q - \alpha_1)}{t} = \beta_1 \quad (6.6)$$

$$q(t) = -\frac{t\beta_1}{m} + \alpha_1 \quad (6.7)$$

und

b)

$$\frac{\partial S_2}{\partial \alpha_2} = q\sqrt{\frac{m}{2\alpha_2}} - t = \beta_2 \quad (6.8)$$

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha_2}{m}}t + \sqrt{\frac{2\alpha_2}{m}}\beta_2. \quad (6.9)$$

Vergleich mit

$$q(t) = v_0t + q_0 \quad (6.10)$$

führt auf

$$\alpha_1 = q_0, \quad \text{Startposition,} \quad (6.11)$$

$$\alpha_2 = \frac{mv_0^2}{2}, \quad \text{Energie.} \quad (6.12)$$

6.2 HÜPFENDES TEILCHEN AUF VERTIKALEM ZYLINDER I

a) Wir erhalten die Hamilton-Jacobi Gleichung durch Ersetzen der Impulse:

$$\frac{1}{2mR^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 + mgz + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (6.13)$$

b) Mithilfe des Separationsansatzes

$$S(\theta, z, \alpha_1, \alpha_2, t) = W_\theta(\theta, \alpha_1, \alpha_2) + W_z(z, \alpha_1, \alpha_2) - Et \quad (6.14)$$

ergibt sich

$$\frac{1}{2mR^2} \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_z}{\partial z} \right)^2 + mgz = E \quad (6.15)$$

Diese lässt sich separieren mittels

$$\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} = \alpha_1 \quad (6.16)$$

und

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_z}{\partial z} \right)^2 + mgz = \alpha_2. \quad (6.17)$$

Wobei dann für die Energie

$$E = \frac{\alpha_1^2}{2mR^2} + \alpha_2 \quad (6.18)$$

gilt. Integration ergibt

$$W_\theta = \alpha_1 \theta \quad (6.19)$$

$$W_z = \sqrt{2m} \int \sqrt{\alpha_2 - mgz} dz = -\frac{2\sqrt{2m}}{3mg} (\alpha_2 - mgz)^{\frac{3}{2}} \quad (6.20)$$

Daher ist die Lösung der H-J Gleichung

$$S(\theta, z, \alpha_1, \alpha_2, t) = \alpha_1 \theta - \frac{2\sqrt{2m}}{3mg} (\alpha_2 - mgz)^{\frac{3}{2}} - \frac{\alpha_1^2}{2m} t - \alpha_2 t \quad (6.21)$$

c) Wir bestimmen

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \theta - \frac{1}{mR^2} \alpha_1 t \quad (6.22)$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{mg}} \sqrt{\alpha_2 - mgz} - t \quad (6.23)$$

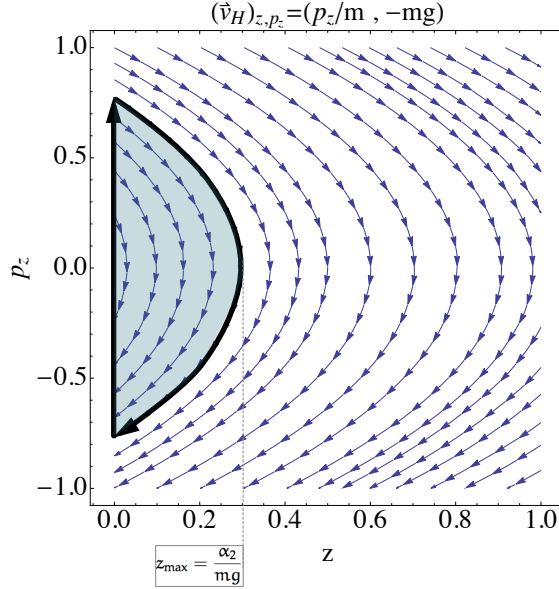
und erhalten nach Inversion

$$\theta(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, t) = \beta_1 + \frac{\alpha_1}{mR^2} t \quad (6.24)$$

$$z(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, t) = \frac{\alpha_2}{mg} - \frac{g}{2} (\beta_2 + t)^2 \quad (6.25)$$

6.3 HÜPFENDES TEILCHEN AUF VERTIKALEM ZYLINDER II

- a) Die Trajektorien im Phasenraumportrait sind abgeschnittene Parabeln. Die Reflexion des Teilchens entlang der $x = 0$ Linie schließt die Trajektorien.



- b) Die Wirkung der z Koordinate (markierte Fläche in obiger Abbildung) berechnen wir als das doppelte der Halbparabel ($p_z > 0$, $z \in [0, z_{\max}]$) durch geschickte Substitution des Integranden (nicht explizit angeschrieben):

$$I_z = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_z} p_z dz \quad (6.26)$$

$$= \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^{z_{\max}} \sqrt{2m\alpha_2 - 2m^2gz} dz \quad (6.27)$$

$$= \frac{(2m\alpha_2)^{3/2}}{3\pi m^2 g} \quad (6.28)$$

I_θ ist denkbar einfach bestimmt durch Integration des konstanten p_θ über eine volle Umdrehung ($\theta \in [0, 2\pi]$):

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_\theta} p_\theta d\theta \quad (6.29)$$

$$= \frac{1}{2\pi} 2\pi p_\theta \quad (6.30)$$

$$= p_\theta \quad (6.31)$$

$$= R\sqrt{2mE - \alpha_2} \quad (6.32)$$

- c) Die Hamiltonfunktion ergibt sich damit zu:

$$H(I_z, I_\theta) = \frac{I_\theta^2}{2mR^2} + \frac{(3\pi m^2 g I_z)^{2/3}}{2m} \quad (6.33)$$

- d) Die Wirkungen haben wir schon zuvor mit den alten Phasenraumkoordinaten ausgedrückt:

$$I_z = \frac{(p_z^2 + 2m^2gz)^{3/2}}{3\pi m^2g} \quad (6.34)$$

$$I_\theta = p_\theta \quad (6.35)$$

Die Winkel ϕ_θ, ϕ_z ergeben sich zu:

$$\phi_z = \frac{\partial W_z}{\partial I_z} = \frac{\partial}{\partial I_z} \left(-\frac{2\sqrt{2m}}{3mg} \left(\frac{(3\pi m^2gI_z)^{2/3}}{2m} - mgz \right)^{3/2} \right) \quad (6.36)$$

$$= \dots \quad (6.37)$$

$$= \frac{-\pi p_z}{\sqrt{p_z^2 + 2m^2gz}} \quad (6.38)$$

$$\phi_\theta = \frac{\partial W_\theta}{\partial I_\theta} = \theta \quad (6.39)$$

wobei bei ϕ_z nach dem Ableiten für I_z aus Gl. 6.34 eingesetzt wurde.

6.4 KEPLERBAHN

- a) Da die Bewegungsebene in der Angabe als x-y-Ebene gewählt war, und $\mathbf{A} = A\hat{e}_x$ folgt sofort die linke Seite, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar \cos \Phi$. Die rechte Seite ist

$$\mathbf{r} \cdot \left(\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{\mu K}{r} \mathbf{r} \right) = r_i \epsilon_{ijk} p_j \epsilon_{klm} r_l p_m - \frac{\mu K}{r} r_i r_i \quad (6.40)$$

$$= L_k L_k - \frac{\mu K}{r} r^2 \quad (6.41)$$

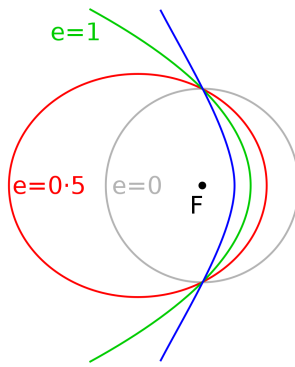
$$= L^2 - \mu Kr. \quad (6.42)$$

- b) Auflösen von $Ar \cos(\phi) = L^2 - \mu Kr$ gibt

$$r = \frac{L^2/\mu K}{1 + A/\mu K \cos \Phi} =: \frac{p}{1 + e \cos \phi}. \quad (6.43)$$

- c) Die Exzentrizität e gibt die Streckung der Bahn an:

- $e = 0$: Kreisbahn
- $e < 1$: elliptische Bahn
- $e = 1$: parabolische Bahn
- $e > 1$: hyperbolische Bahn.



Von wikipedia; zur Diskussion des Beispiels siehe auch
en.wikipedia.org/wiki/Kepler_orbit