1. TEST ANALYTISCHE MECHANIK VU, 28.1.2022

1 PRINZIP DER STATIONÄREN WIRKUNG

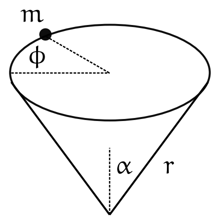
a) Was besagt das Hamiltonsche Variationsprinzip in Worten?

b) Schreiben Sie das Wirkungsintegral an! Was wird dabei genau variiert? Was ist fixiert?

c) Leiten Sie die Euler-Lagrange Gleichungen für ein System mit einem Freiheitsgrad, $L = L(q, \dot{q})$, aus dem Hamilton'schen Variationsprinzip ab.

d) Welche Bedingung an das Wirkungsintegral des Hamilton'schen Variationsprinzips wird bei der Hamilton'schen Prinzipalfunktion der Hamilton-Jacobi Gleichung fallen gelassen?

2 TEILCHEN IN EINEM KEGEL



Skizze zu Beispiel 2. Ein Kegel mit Öffnungswinkel α.

Ein Teilchen der Masse m bewege sich auf der Innenseite eines nach oben offenen Kegels (so wie eine Kugel in einem umgedrehten Verkehrshütchen). Der (fixe) Öffnungswinkel des Kegels ist α.

Die Lagrangefunktion des Teilchens ist

$$L(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2(\alpha)\right) - mgr\cos(\alpha), \tag{1}$$

mit m, g und $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

a) Was sind die verallgemeinerten Koordinaten, Geschwindigkeiten und Impulse des Systems?

b) Stellen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen für das System auf.

Sie müssen die Bewegungsgleichungen nicht lösen.

c) Welche Koordinate ist in L in Gleichung (1) zyklisch? Woran erkennen Sie in L, dass diese Koordinate zyklisch ist? Was folgt aus der Existenz einer zyklischen Koordinate?

d) Die Hamiltonfunktion H ist die erzeugende Funktion welcher infinitesimalen Transformation im Phasenraum? Geben Sie das Vektorfeld ν_H explizit an.

e) Welche ist die erzeugende Funktion g für die infinitesimale Transformation der zyklischen Koordinate aus c)? Geben Sie das zugehörige Vektorfeld ν_g explizit an! Diskutieren Sie die unterschiedliche Interpretation der Poisson-Klammern $\{g, H\}$ und $\{H, g\}$ und in dem Zusammenhang das Noether'sche Theorem am Beispiel dieses Systems.

3 KANONISCHE TRANSFORMATION

Gegeben sei

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \tag{2}$$

und die Transformation

$$\bar{q}(q,p) = \frac{m\omega q + ip}{\sqrt{2m\omega}}, \qquad \bar{p}(q,p) = i\frac{m\omega q - ip}{\sqrt{2m\omega}} \tag{3}$$

wobei i die imaginäre Einheit ist.

Die inverse Transformation ist gegeben durch

$$q = \sqrt{\frac{1}{2m\omega}}(\bar{q} - i\bar{p}),$$
$$p = -i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}(\bar{q} + i\bar{p}).$$

a) Zeigen Sie mittels Poissonklammern, dass diese Transformation kanonisch ist!

b) Bestimmen Sie α in der $F_1(q,\bar{q})$ Funktion

$$F_1(q,\bar{q}) = i\left(\frac{\bar{q}^2}{2} - \alpha q\bar{q} + \frac{m\omega q^2}{2}\right) \tag{4}$$

so, dass

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \qquad \bar{p} = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}}$$

für die Koordinaten (3) gilt.

c) Schreiben Sie die Hamiltonfunktion Gl. (2) in den neuen Koordinaten $(\bar{q},\bar{p})$, und bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für das System.

d) Lösen Sie das System mit den Anfangsbedinungen $\bar{q}_0$ und $\bar{p}_0$.

4 x^3 POTENTIAL

Gegeben sei die Hamiltonfunktion

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \tag{5}$$

für ein Teilchen der Masse m.

a) Stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf.

Sie müssen die Bewegungsgleichungen nicht lösen.

b) Schreiben Sie das Hamiltonsche Geschwindigkeitsfeld an. An welchen Stellen (x,p) verschwindet es?

c) Skizzieren Sie ein Phasenraumportrait! Setzen Sie dafür $m = 1$. Es reicht eine Skizze, mit typischen Trajektorien und deren Richtungen für große Absolutwerte (positiv und negativ) x, p, sowie in der Nähe der Stellen, wo das Hamiltonsche Geschwindigkeitsfeld verschwindet.

HINWEIS FÜR DAS PHASENRAUMPORTRAIT

$$0.8 - 0.8^2 = 0.16$$
$$1.2 - 1.2^2 = -0.24$$

d) Wie lautet die Lagrangefunktion zu H, Gl. (5)? Falls Sie dies nicht sofort ablesen können, führen Sie eine Legendretransformation "rückwärts",

$$L(x,\dot{x}) = p(\dot{x})\dot{x} - H(x,p(\dot{x})), \tag{6}$$

durch.

VIEL ERFOLG!