

1.1 KOMPLIZIERTES POTENTIAL

- a) Je größer v_0 , desto größer wird die Energie des Teilchens. Für große Energien bewegt sich das Teilchen im wesentlichen zwischen zwei Wänden bei $\pm\pi/(2a)$ hin und her. Im Limes $v_0 \rightarrow \infty$ gilt

$$T = \frac{2\pi}{v_0 a} \quad (1.1)$$

- b) Für kleine Anfangsgeschwindigkeiten v_0 berechnen wir die lokale Taylor-Approximation

$$T_{f(x;x_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

um das gegebene Potential zu vereinfachen. Wir entwickeln an der Stelle $x_0 = 0$ und bis zum Grad $n = 2$. Zuerst berechnen wir

$$V'(ax) = \frac{k}{2a^2} 2 \tan(ax) \sec^2(ax) a$$

$$V''(ax) = \frac{k}{2a^2} 2 \sec^2(ax) \sec^2(ax) a^2 + \dots$$

Der zweiten Term in $V''(ax)$ enthält $\tan(ax)$, genauso wie $V(ax)$ und $V'(ax)$, wodurch alle diese Terme an $x_0 = 0$ ausgewertet Null werden. Es bleibt

$$V(ax) \approx \frac{kx^2}{2}$$

Mithilfe des Energieerhaltungssatzes kann man jetzt die Umkehrpunkte bestimmen, da $V(ax_0) = 0$. Es gilt:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{kx^2}{2}$$

Diese Gleichung kann nach v aufgelöst werden:

$$v(v_0, x) = \pm \sqrt{v_0^2 - \frac{kx^2}{m}}$$

Bei den Umkehrpunkten muss $v(v_0, x) = 0$ gelten. Daraus folgt, dass

$$x_u = \pm \sqrt{\frac{m v_0^2}{k}}$$

- c) Wir integrieren von $x = 0$ nach $x = x_{\max}$ um die Zeit zu berechnen, in der das Teilchen diesen Abstand durchläuft:

$$T(0 \rightarrow x_{\max}) = \int_0^{x_{\max}} \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - \frac{kx'^2}{m}}} dx' \quad (1.2)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\frac{k}{m}} x}{\sqrt{v_0^2 - \frac{kx^2}{m}}} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \Big|_0^{x_{\max}} \quad (1.3)$$

$$=^* \sqrt{\frac{m}{k}} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tan^{-1}(\alpha) \quad (1.4)$$

$$= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.5)$$

Im letzten Schritt geht die untere Wurzel gegen 0, d.h. der Bruch "explodiert". Dies kann durch einen Limes beschrieben werden, wobei α den ganzen Bruch repräsentiert. $T(0 \rightarrow x_{\max})$ ist aber nur 1/4 der ganzen Periode, und daher

* Das Integral kann mithilfe des Hinweises gelöst werden, wobei $a = v_0^2$ und $b = k/m$.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Dies ist genau die Periode eines Harmonischen Oszillators.

HINWEIS:

Das Beispiel ist auch ohne Approximation des Potentials analytisch lösbar:

$$t(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - \frac{k}{ma^2} \tan^2(ax')}} dx' \quad (1.6)$$

$$= \frac{1}{v_0} \frac{1}{a\sqrt{1+b}} \arcsin(\sqrt{1+b} \sin(ax)) \quad (1.7)$$

mit $b = k/(ma^2v_0^2)$. Letztere kann nach $x(t)$ umgeformt werden:

$$x(t) = \frac{1}{a} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+b}} \sin(v_0 a t \sqrt{1+b})\right)$$

Daraus erhält man gleich die Periode T:

$$T = \frac{2\pi}{v_0 a \sqrt{1+b}}$$

Jetzt können wir die Limes $v_0 \rightarrow 0$ und $v_0 \rightarrow \infty$ evaluieren:

$$\lim_{v_0 \rightarrow 0} \approx 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\lim_{v_0 \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{v_0} \frac{2\pi}{a} \approx \frac{2L}{v_0}$$

Dies sind genau die von uns gefundenen Perioden in (a) und (c).

1.2 EIN STEIN

- a) Wir betrachten zunächst den Fall, dass der Lift sich relativ zum von uns gewählten Bezugssystem in Ruhe befindet und der Stein im homogenen Gravitationsfeld der Erde zu Boden fällt. Dann ist seine Beschleunigung $a_S(t)$ einfach die Erdbeschleunigung $-g$:

$$a_S(t) = -g, \quad \text{wobei } g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$$

Durch Aufintegrieren erhalten wir die Geschwindigkeit und den Ort des Steins in Abhängigkeit der Zeit. Der Stein hat zum Zeitpunkt $t = 0$ die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$. Darüber hinaus wollen wir den Boden des Liftes als $z = 0$ festlegen.

$$v_S(t) = -gt + v_0 = -gt \quad (1.8)$$

$$z_S(t) = -\frac{g}{2}t^2 + z_0. \quad (1.9)$$

Der Zeitpunkt t^* , an dem der Stein auf den Boden aufschlägt ist

$$z(t^*) = -\frac{g}{2}t^{*2} + z_0 \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.10)$$

$$t^* = \sqrt{\frac{2z_0}{g}} \approx 0.45 \text{ s} \quad (1.11)$$

für $z_0 = 1 \text{ m}$.

- b) Für den Stein wirkt eine Beschleunigung des Liftes a_L nach oben wie eine zusätzliche Beschleunigung des Steins nach unten, daher $\tilde{g} = g + a_L$. Mit der gleichen Rechnung wie oben

$$a_L = \frac{2z_0}{t^{*2}} - g \approx 1 \text{ m/s}^2, \quad (1.12)$$

wobei nun $t^* = 0.43 \text{ s}$ und wieder $z_0 = 1 \text{ m}$. Daher beschleunigt der Lift mit 1 m/s^2 nach oben.

HINWEIS Das eben Gerechnete veranschaulicht das Einsteinsche Äquivalenzprinzip, auf dem Einstein zu Beginn des 20. Jahrhunderts seine Allgemeine Relativitätstheorie aufbaute.

1.3 GALILEI-TRANSFORMATION

- a) Führen wir 2 Galilei Transformationen (1) und (2) hintereinander aus, erhalten wir

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_{(2)}\mathbf{R}_{(1)}\left(\mathbf{x} - \mathbf{v}_0^{(1)}t - \mathbf{b}_0^{(1)}\right) - \mathbf{R}_{(2)}\mathbf{v}_0^{(2)}\left(t - t_0^{(1)}\right) - \mathbf{R}_{(2)}\mathbf{b}_0^{(2)}, \quad (1.13)$$

$$\tilde{t} = t - \left(t_0^{(1)} + t_0^{(2)}\right). \quad (1.14)$$

Koeffizientenvergleich mit

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_{(3)}\left(\mathbf{x} - \mathbf{v}_0^{(3)}t - \mathbf{b}_0^{(3)}\right), \quad (1.15)$$

$$\tilde{t} = t - t_0^{(3)} \quad (1.16)$$

führt auf

$$\mathbf{R}_{(3)} = \mathbf{R}_{(2)} \mathbf{R}_{(1)} \quad (1.17)$$

$$\mathbf{v}_0^{(3)} = \mathbf{R}_{(1)}^{-1} \mathbf{v}_0^{(2)} + \mathbf{v}_0^{(1)} \quad (1.18)$$

$$\mathbf{b}_0^{(3)} = \mathbf{R}_{(1)}^{-1} \left(\mathbf{b}_0^{(2)} - \mathbf{v}_0^{(2)} \mathbf{t}_0^{(1)} \right) + \mathbf{b}_0^{(1)} \quad (1.19)$$

$$\mathbf{t}_0^{(3)} = \mathbf{t}_0^{(1)} + \mathbf{t}_0^{(2)}. \quad (1.20)$$

b) Wenn $(\mathbf{R}^{(3)}, \mathbf{v}_0^{(3)}, \mathbf{b}_0^{(3)}, \mathbf{t}_0^{(3)}) = (\mathbf{I}, 0, 0, 0)$, dann folgt sofort

$$\mathbf{R}_{(2)} = \mathbf{R}_{(1)}^{-1} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{t}_0^{(2)} = -\mathbf{t}_0^{(1)} \quad (1.22)$$

und weiter

$$\mathbf{v}_0^{(2)} = -\mathbf{R}_{(1)} \mathbf{v}_0^{(1)} \quad (1.23)$$

$$\mathbf{b}_0^{(2)} = -\mathbf{R}_{(1)} \left(\mathbf{v}_0^{(1)} \mathbf{t}_0^{(1)} + \mathbf{b}_0^{(1)} \right). \quad (1.24)$$

1.4 ZWANGSBEDINUNGEN

Es wird N für die Anzahl an Teilchen, s für die Anzahl an holonomen Zwangsbedingungen sowie f für die Anzahl an Freiheitsgraden gewählt.

Allgemein gilt in d Dimensionen:

$$f = d \cdot N - s$$

- a) Ein Teilchen an einer Feder in 3D: keine Zwangsbedingung: $f = 3$
- b) Das Doppelpendel in 2D: zwei holonome, skleronome Zwangsbedingungen: $f = 2s - 2 = 2$
- c) Ein Teilchen auf einem schiefen Tisch: eine nichtholonome Zwangsbedingung: $f = 3$. (auf dem Tisch holonom)
- d) Ein Teilchen in einem zeitabhängigen harmonisches Potential

$$V(x, t) = x^2 + h(t)$$

keine Zwangsbedingung: $f = 2$