2. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 5.12.2021

2

2.1 LÖSUNG SKIFAHREN

a) Die Zwangsbedingung an die Koordinaten lautet:

$$f(x, z) = x \tan(\alpha) + z = 0 \tag{2.1}$$

Da sie auf die zeitunabhängige Form $f(\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N) = 0$ gebracht werden kann, handelt es sich um eine holonome und weiters skleronome Zwangsbedingung. Eine geeignete generalisierte Koordinate ist gegeben durch

$$x(\eta) = -\frac{\eta}{\tan(\alpha)} \tag{2.2}$$

$$z(\eta) = \eta \tag{2.3}$$

Wir überprüfen ob die gefundene Koordinate η eine geeignete generalisierte Koordinate ist, indem wir sie in die Zwangsbedingung einsetzen:

$$f(x(\eta), z(\eta)) = x(\eta)\tan(\alpha) + z(\eta) = -\frac{\eta}{\tan(\alpha)}\tan(\alpha) + \eta = 0 \tag{2.4}$$

Weiters können alle Punkte am "Skihang" erreicht werden, und damit ist η eine geeignete generalisierte Koordinate.

b) Der Einheitsvektor errechnet sich zu:

$$\hat{e}_\eta = \frac{1}{\mathcal{N}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \frac{1}{\mathcal{N}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\tan(\alpha)} \\ 1 \end{pmatrix} = \sin(\alpha)\begin{pmatrix} -\frac{1}{\tan(\alpha)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Die Zwangskraft, welche die Skifahrerin auf ihrer Bahn hält, ist normal auf den Einheitsvektor $\hat{e}_\eta$. Sie wirkt der Gravitation entgegen und zeigt daher in Richtung:

$$\mathbf{F}^R \propto \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

c) Die Newtonschen Bewegungsgleichungen müssen um eine Zwangskraft ergänzt werden, um der Zwangsbedingung gerecht zu werden.

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\hat{e}_z + \vec{F}^R \tag{2.6}$$

Projeziert man diese Gleichung auf den Einheitsvektor $\hat{e}_\eta$ so fällt die Zwangskraft stets weg, da sie immer orthogonal zum Tangentialvektor ist.

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \hat{e}_\eta = -mg\hat{e}_z \cdot \hat{e}_\eta + \underbrace{\vec{F}^R \cdot \hat{e}_\eta}_{=0} \tag{2.7}$$

Um dann weiters die Bewegungsgleichung für die generalisierte Koordinate zu erhalten müssen die Skalarprodukte berechnet werden:

$$\hat{e}_z \cdot \hat{e}_\eta = \sin(\alpha) \tag{2.8}$$

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \hat{e}_\eta = \ddot{x}\hat{e}_x \cdot \hat{e}_\eta + \ddot{z}\hat{e}_z \cdot \hat{e}_\eta = -\ddot{x}\cos(\alpha) + \ddot{z}\sin(\alpha) \tag{2.9}$$

Die zweite Ableitung der Koordinaten muss ebenfalls durch η ausgedrückt werden:

$$\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}(-\frac{\eta}{\tan(\alpha)}) = -\frac{\ddot{\eta}}{\tan(\alpha)} \tag{2.10}$$

$$\ddot{z} = \ddot{\eta} \tag{2.11}$$

Einsetzen in in das Saklarprodukt $\ddot{\vec{r}} \cdot \hat{e}_\eta$ ergibt:

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \hat{e}_\eta = \frac{\ddot{\eta}\cos(\alpha)}{\tan(\alpha)} + \ddot{\eta}\sin(\alpha) \tag{2.12}$$

Eingesetzt in die Newtonsche Bewegungsgleichung 2.7 ergibt sich dann:

$$\frac{\ddot{\eta}\cos(\alpha)}{\tan(\alpha)} + \ddot{\eta}\sin(\alpha) = -g\sin(\alpha) \rightarrow \boxed{\ddot{\eta} = -g\sin^2(\alpha)} \tag{2.13}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung in generalisierten Koordinaten.

d) Die Bewegungsgleichung für ein Teilchen in einem modifizierten Schwerefeld lautet:

$$\ddot{\vec{r}} = -g' \cdot \hat{e}_z \tag{2.14}$$

Da η genau die Höhe der Skifahrerin angibt, liefert uns Gleichung 2.13 die beschleunigte Bewegung in die z-Richtung. Das ist analog zum freien Fall, aber mit modifizierter Erdbeschleunigung, nämlich $g\sin^2(\alpha) = g'$. Umformen auf α und einsetzen der Mondbeschleunigung liefert:

$$\alpha = \arcsin\left(\sqrt{\frac{g'}{g}}\right) \approx 24^\circ \tag{2.15}$$

2.2 EIN STEIN UND LAGRANGE

a) Der gegebene Ansatz für die Bewegungsgleichung lautet:

$$z(t) = at + bt^2 \tag{2.16}$$

unter der Nebenbedingung:

$$z(t_0) \stackrel{!}{=} -h_0 = at_0 + bt_0^2 \tag{2.17}$$

Umformen der Gleichung liefert:

$$b(a) = \frac{-h_0 - at_0}{t_0^2} \tag{2.18}$$

b) Wir berechnen das Wirkungsfunktional S:

$$S[z] = \int_0^{t_0} L dt \quad \text{mit} \quad L = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz \tag{2.19}$$

Ableiten der Bewegungsgleichung $z(t)$ zu $\dot{z}(t) = a + 2bt$ und einsetzen in S liefert:

$$S(a) = \int_0^{t_0} \left(\frac{ma^2}{2} + (2mab(a) - mga)t + (2mb(a)^2 - mgb(a))t^2\right) dt \tag{2.20}$$

Das Integral ergibt sich zu:

$$S(a) = \frac{ma^2}{2} t_0 + (2mab(a) - mga)\frac{t_0^2}{2} + (2mb(a)^2 - mgb(a))\frac{t_0^3}{3} \tag{2.21}$$

c) Wir berechnen nun das Minimum von $S(a)$ unter der Berücksichtigung von $b'(a) = -1/t_0$:

$$S'(a) \stackrel{!}{=} 0 \tag{2.22}$$

diese Bedingung führt zu einer Gleichung in a, die nach Auflösen und mit $t_0 = \sqrt{2h_0/g}$ zu der Bedingung

$$a = 0 \tag{2.23}$$

führt. Daraus folgt dann für $b = -\frac{g}{2}$ und letztlich für $z(t)$:

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 \tag{2.24}$$

2.3 Lagrangefunktion eines freien Teilchens

a) Aus der Homogenität des Raumes und der Zeit folgt, dass das System invariant gegenüber einer Verschiebung $x \to x + \Delta x$ im Raum oder $t \to t + \Delta t$ in der Zeit sein muss, da sich kein Punkt von einem anderen unterscheiden lässt. Damit schließen wir $L \propto \vec{x}, x^2, \vec{x} \cdot \vec{v}, v^2 t$ aus. Allgemeiner kann L keine Funktion des Ortes oder der Zeit sein.

Aus der Isotropie des Raumes folgt, dass keine Richtung unterscheidbar sein kann, wodurch $L \propto \vec{v}$ ausgeschlossen ist. L muss eine Funktion vom Absolutwert der Geschwindigkeit sein, $L = f(|\vec{v}|)$, in unserem Beispiel bleibt v^2, aber auch v^3 mit $v = |\vec{v}|^3$.

b) Wir transformieren

$$L(v) = \frac{1}{2}mv^2 \to \tilde{L}(v) \tag{2.25}$$

mit

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{v}_0 t, \qquad \tilde{t} = t \tag{2.26}$$

$$v^2 = \dot{\mathbf{x}}^2 \tag{2.27}$$

$$\tilde{L}(v) = \frac{1}{2}m\left[\frac{d}{dt}(\mathbf{x} + \mathbf{v}_0 t)\right]^2 \tag{2.28}$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{x}}^2 + 2\dot{\mathbf{x}}\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^2) \tag{2.29}$$

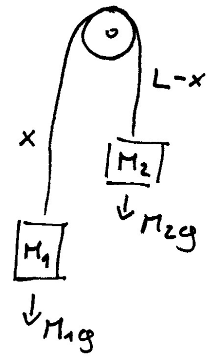
$$= \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2}_{L(v)} + \underbrace{\frac{1}{2}m(2\dot{\mathbf{x}}\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^2)}_{\frac{d}{dt}F} \tag{2.30}$$

Da $d/dt\,F$ von der Form

$$\frac{d}{dt}F = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{2.31}$$

ist, sehen wir durch Vergleich (v_0 ist konstant)

$$F = mxv_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 t. \tag{2.32}$$



2.4 FALLMASCHINE NACH ATWOOD

a) Die potentielle Energie des Systems ergibt sich aus der Summe der potentiellen Energien der Massen

$$V = V_1 + V_2 = -M_1 g x - M_2 g(L - x), \tag{2.33}$$

wobei x die Länge des Seiles bis zur Masse M_1 ist, und $L - x$ die Länge des Seiles bis zur Masse M_2. Die kinetische Energie ist:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{M_1\dot{x}^2}{2} + \frac{M_2\dot{x}^2}{2} \tag{2.34}$$

Berechne damit die Lagrange-Funktion des Systems:

$$L = T - V \tag{2.35}$$

$$= \frac{(M_1 + M_2)\dot{x}^2}{2} + M_1 g x + M_2 g(L - x). \tag{2.36}$$

Wir wählen x, die Länge des Seils auf der linken Seite als generalisierte Koordinate. Die Bewegung der Masse M_2 auf der rechten Seite ist dadurch mitbestimmt.

b) Aus der Euler-Lagrange-Gleichung ergibt sich die Bewegungsgleichung des Systems:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} \tag{2.37}$$

$$= (M_1 + M_2)\ddot{x} - (M_1 - M_2)g \tag{2.38}$$

$$\ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} g \tag{2.39}$$

Aus dem Hinweis wissen wir, dass $g'_{\text{Mond}} = 1{,}622\ \text{ms}^{-2}$, oder $g'_{\text{Mond}} = 0{,}17g$. Aus

$$\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} g = 0{,}17g \tag{2.40}$$

bekommen wir durch umformen $M_2 = 0{,}7M_1$. Man kann also mit der Atwoodschen Fallmaschine eine beliebig verringerte Fallbeschleunigung erhalten. So können die Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung studiert werden.