

3. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 14.12.2021

3

3.1 PERLE AUF EINEM ROTIERENDEN STAB

Ein Stab rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω , und darauf sei eine Perle mit der Masse m frei beweglich.

- Stellen Sie die Lagrangefunktion für die Bewegung der Perle auf. Verwenden Sie die radiale Position ρ der Perle als generalisierte Koordinate.
- Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Perle auf und lösen Sie die Bewegungsgleichung.

3.2 NOETHER UND EIN STEIN

Die Lagrangefunktion unseres Steines lautet:

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \quad (3.1)$$

- Was sind die zyklischen Koordinaten dieses Systems? Berechnen Sie die zugehörigen erhaltenen Impulse!
- Betrachten Sie die Transformation $z \rightarrow z + h$. Wie ändert sich die Lagrangefunktion bei dieser Transformation? Zeigen Sie, dass die neue Lagrangefunktion als

$$\tilde{L} = L + \frac{dF}{dt} \quad (3.2)$$

geschrieben werden kann, und finden Sie F .

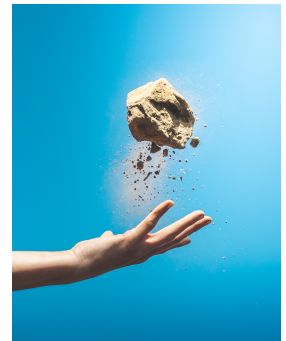


Photo by Miguel Bruna on unsplash

3.3 GRAVITATION IN 2D

Gegeben Sei

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + m \frac{K}{r} \quad (3.3)$$

mit $m, K \in \mathbb{R}^+$.

- Benutzen Sie die Euler-Lagrange Gleichung um die Bewegungsgleichungen für (r, θ) zu finden. Welche Koordinate ist zyklisch, und wie lautet der zugehörige generalisierte und erhaltene Impuls L_z ? Welche Symmetrie liegt der zyklischen Variable zu Grunde?
- Ersetzen Sie in der Bewegungsgleichung für r die Variable $\dot{\theta}$ mit Ihrer Lösung aus a). Identifizieren Sie eine "Kraft" $F(r)$ in der Bewegungsgleichung und drücken Sie diese durch die Ableitung eines effektiven Potentials $V(r)$ aus.



Photo by NASA on unsplash

3.4 TEILCHEN IM ELEKTROMAGNETISCHEN FELD

Die Lagrangefunktion eines Teilchens im elektrischen und magnetischen Feld lautet:

$$L(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = \frac{mv^2}{2} + eEz + \frac{eB}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \quad (3.4)$$

mit m, E, B und $e \in \mathbb{R}$, und $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

- a) Gibt es in Gleichung (3.4) zyklische Variablen? Transformieren Sie Gleichung (3.4) auf Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) . Gibt es nun zyklische Variablen? Wie lautet die zugehörige Erhaltungsgröße?
- b) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen mittels der Euler-Lagrange Gleichung.
- c) Zeigen Sie, dass sich die Lagrangefunktion in Gleichung 3.4 von

$$\tilde{L}(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = \frac{mv^2}{2} + eEz + eBx\dot{y}, \quad (3.5)$$

nur um die totale Zeitableitung $d/dt F(x, y)$ einer Funktion $F(x, y)$ unterscheiden. Wie lautet $F(x, y)$?

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):

3.1 / 3.2 / 3.3 a / 3.3 b / 3.4 a / 3.4 b-c



Photo by Sunil Ray on unsplash