4. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 11.01.2022

4

4.1 EINSTEIN UND EIN STEIN

a) Aus dem Mechanik Skript:

- Calculate generalized momenta

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \to p_j = p_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{4.1}$$

- Express $\dot{\mathbf{q}}$ in terms of $\mathbf{q}$ and $\mathbf{p}$:

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \tag{4.2}$$

- Apply the Legendre transformation

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - L\big(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t\big) \tag{4.3}$$

Die Lagrangefunktion ist eine Funktion der generalisierten Orte und Geschwindigkeiten, $L = L(q, \dot{q}, t)$, und die Hamiltonfunktion ist eine Funktion der generalisierten Orte und Impulse, $H = H(q, p, t)$.

b) Wir führen nun die Legendretransformation durch:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{m\dot{q}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{q}^2}{c^2}}} = m\dot{q}\gamma \tag{4.4}$$

Umstellen der Gleichung liefert:

$$\dot{q}^2 = \frac{p^2c^2}{m^2c^2 + p^2}, \quad \dot{q}(p) = \frac{pc}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}} \tag{4.5}$$

Die setzen wir nun in die Hamiltonfunktion ein:

$$\begin{aligned}
H(q, p, t) &= p\dot{q}(p) - L(q, \dot{q}(p), t) && (4.6)\\
&= \frac{p^2 c}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}} + mc^2\sqrt{1 - \frac{p^2}{m^2c^2 + p^2}} && (4.7)\\
&= \frac{p^2c + mc^2\sqrt{1 - \frac{p^2}{m^2c^2+p^2}}\sqrt{m^2c^2 + p^2}}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}} && (4.8)\\
&= \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}. && (4.9)
\end{aligned}$$

4.2 GRAVITATION IN 3D

a) Die konjugierten Impulse ergeben sich aus $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$:

$$\begin{aligned}
p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \longrightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} && (4.10)\\
p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \longrightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} && (4.11)\\
p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin\theta\dot{\phi} \longrightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin\theta^2} && (4.12)
\end{aligned}$$

b) Wir führen eine Legendre-Transformation durch:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p})) \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} H =& \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{p_\phi^2}{mr^2 \sin\theta^2} && (4.14) \\ & - \frac{m}{2}\left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \frac{p_\theta^2}{m^2 r^4} + r^2 \sin\theta^2 \frac{p_\phi^2}{m^2 r^4 \sin\theta^4}\right) - m\frac{K}{r} && (4.15) \\ =& \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin\theta^2} - \frac{mK}{r} && (4.16) \end{aligned}$$

Die Hamilton-Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{4.17}$$

und explizit

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p_r}{m} && (4.18) \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{mr^2} && (4.19) \\ \dot{\phi} &= \frac{p_\phi}{mr^2 \sin\theta^2} && (4.20) \end{aligned}$$

für $\dot{q}$ (beachte, dass diese mit den aus der Lagrangefunktion berechneten Ausdrücken übereinstimmen) und für $\dot{p}$:

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\phi^2}{mr^3 \sin\theta^2} - \frac{mK}{r^2} && (4.21) \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{2mr^2 \sin\theta^3} && (4.22) \\ \dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0. && (4.23) \end{aligned}$$

Da $\dot{p}_\phi = 0$, ist p_ϕ eine Erhaltungsgröße.
Mit der Anfangsbedinung $p_\phi(0) = 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p_r}{m} \quad \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{mK}{r^2} && (4.24) \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{mr^2} \quad \dot{p}_\theta = 0 && (4.25) \\ \dot{\phi} &= 0 \quad \dot{p}_\phi = 0 && (4.26) \end{aligned}$$

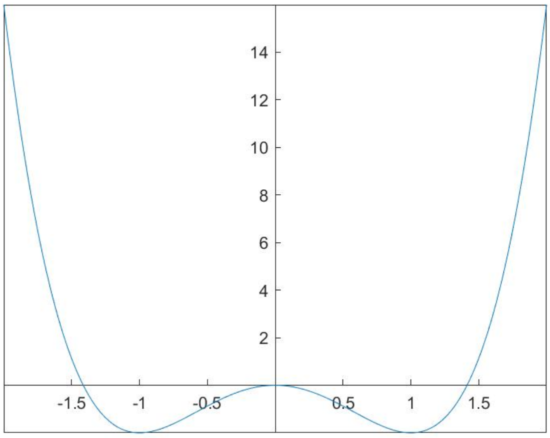
Damit bleibt die Bewegung in der $\phi = 0$ Ebene und wir haben damit die “zweidimensionalen” Bewegungsgleichungen (siehe 3.3) begründet.

4.3 PORTRAIT VOM HIGGS-POTENTIAL

a) Mit $\mu = 2, \lambda = 2$ ergibt sich:

$$V(x) = -4x^2 + 2x^4 \tag{4.27}$$

Dieses Potential hat zwei lokale Minima an $x = -1$ und $x = 1$ sowie ein lokales Maximum an $x = 0$.



b) Mit $H(x, p) = T(p) + V(x)$ ergibt sich:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \mu^2 x^2 + \lambda x^4 \tag{4.28}$$

Mit den Bewegungsgleichungen:

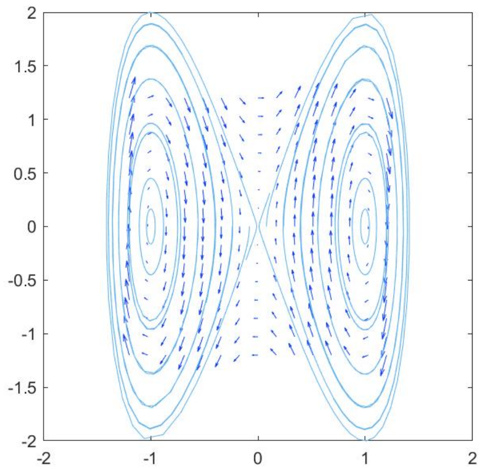
$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \tag{4.29}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 2\mu^2 x - 4\lambda x^3 \tag{4.30}$$

c) Phasenraumportrait:
Berechne zuerst das Hamiltonsche Vektorfeld $\boldsymbol{v}_H$ mit $m = 1$, $\mu = 2$, $\lambda = 2$:

$$\boldsymbol{v}_H = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 8x - 8x^3 \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

Hiermit ergibt sich das Phasenraumportrait:



Jeder Punkt im Phasenraum entspricht einem Bewegungszustand des Teilchens. Das Hamiltonsche Vektorfeld $\boldsymbol{v}_H$ zeigt, wie sich dieser Bewegungszustand verändert. Besonders sind jene Punkte, an denen $\boldsymbol{v}_H = 0$ gilt. Dort verharrt das Teilchen in seinem Bewegungszustand. Dies ist hier bei

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

der Fall, also an den Extremstellen des Potentials.
Bei $x = 0$ reicht eine geringe Störung aus, um das Teilchen aus dem Gleichgewicht zu bringen (lokales Maximum des Potentials). Bei $x = 1$ und $x = -1$ führt eine geringe Störung wiederum zu einer Oszillation, wie an den geschlossenen Trajektorien im Phasenraum erkennbar.

4.4 LIOUVILLE UND EIN STEIN

a) Die Hamiltonfunktion $H(z, p)$ eines Massenpunktes im Potential $V(z) = mgz$ ist gegeben durch:

$$H(z, p) = T(p) + V(z) = \frac{p^2}{2m} + mgz \tag{4.33}$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind dann:

$$\dot{z}(t) = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p(t)}{m} \tag{4.34}$$

und

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial z} = -mg \tag{4.35}$$

Zuerst lösen wir $\dot{p}$ durch einfache Integration und erhalten

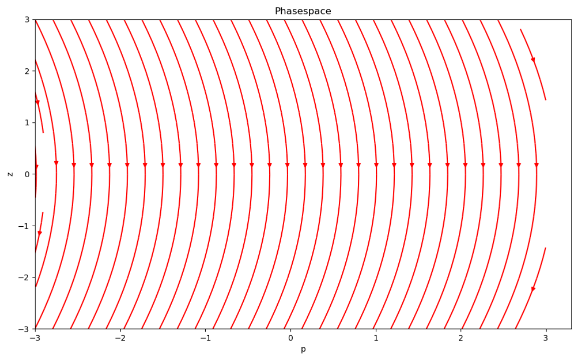
$$p(t) = -mgt + C_1. \tag{4.36}$$

Durch einsetzen von Gl.(4.8) in Gl.(4.6) und einfacher Integration erhält man:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_2 t + C_3 \tag{4.37}$$

b) Das Hamiltonsche Vektorfeld ist:

$$\mathbf{v}_H = (\dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{p}}) \tag{4.38}$$
$$= \left(\frac{p(t)}{m}, -mg\right) \tag{4.39}$$



Aus den gegeben Punkten erhalten wir durch einsetzen:

$$\eta_1(0) = (0{,}0) \Rightarrow C_1 = C_2 = C_3 = 0, \tag{4.40}$$
$$\eta_2(0) = (\Delta z{,}0) \Rightarrow C_1 = C_2 = 0,\ C_3 = \Delta z, \tag{4.41}$$
$$\eta_3(0) = (0{,}\Delta p) \Rightarrow C_1 = \Delta p,\ C_2 = \frac{\Delta p}{m},\ C_3 = 0. \tag{4.42}$$

Wir benutzen die BWGL um die Punkte nach der Zeit Δt berechnen:

$$\eta_1(\Delta t) = \left(-\frac{1}{2}g\Delta t^2,\ -mg\Delta t\right) \tag{4.43}$$
$$\eta_2(\Delta t) = \left(-\frac{1}{2}g\Delta t^2 + \Delta z,\ -mg\Delta t\right) \tag{4.44}$$
$$\eta_3(\Delta t) = \left(-\frac{1}{2}g\Delta t^2 + \frac{\Delta p \Delta t}{m},\ -mg\Delta t + \Delta p\right) \tag{4.45}$$

Jetzt können wir die Vektoren $(\eta_3(\Delta t) - \eta_1(\Delta t))$ und $(\eta_2(\Delta t) - \eta_1(\Delta t))$ bilden

$$\eta_2(\Delta t) - \eta_1(\Delta t) = (\Delta z, 0), \tag{4.46}$$
$$\eta_3(\Delta t) - \eta_1(\Delta t) = \left(\frac{\Delta p \Delta t}{m}, \Delta p\right). \tag{4.47}$$

und daraus die Fläche berechnen:

$$F = |(\eta_3(\Delta t) - \eta_1(\Delta t)) \times (\eta_2(\Delta t) - \eta_1(\Delta t))| \tag{4.48}$$
$$= \Delta p \Delta z. \tag{4.49}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Fläche nach einer Zeit Δt unverändert bleibt.