5. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 18.01.2022

5

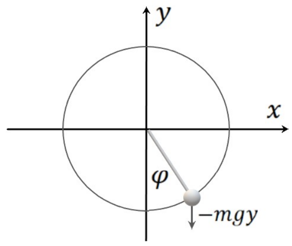
5.1 IN ERINNERUNGEN PENDELN

a) Da sich das Pendel mit Länge l entlang eines Kreises dieses Radius bewegt, lautet die Zwangsbedingung an die kartesischen Koordinaten:

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0. \tag{5.1}$$

Eine geeignete generalisierte Koordinate ist der Auslenkungswinkel des Pendels φ. Messen wir diesen relativ zur Ruhelage, so gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \tag{5.2}$$



Skizze des Pendels

Diese Definition erfüllt die Zwangsbedingung:

$$x^2 + y^2 - l^2 = l^2(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) - l^2 = 0 \tag{5.3}$$

Wir berechnen den normierten Einheitsvektor $\mathbf{e}_\varphi$:

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \frac{l}{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Die Newtonsche Bewegungsgleichung müssen wir nun um eine Zwangskraft $\mathbf{F}^R$ erweitern, welche normal auf den oben gefundenen Einheitvektor $\mathbf{e}_\varphi$ steht. Somit ergibt sich:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{e}_y + \mathbf{F}^R \tag{5.5}$$

Wir projizieren nun diese Gleichung auf $\mathbf{e}_\varphi$. Mit

$$\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \sin(\varphi) \tag{5.6}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

$$= l \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

$$= l \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) + \ddot{\varphi}\cos(\varphi) \\ \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) + \ddot{\varphi}\sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

$$= l\ddot{\varphi}(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) = l\ddot{\varphi} \tag{5.10}$$

folgt für die Projektion der Gleichung auf $\mathbf{e}_\varphi$:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin(\varphi) \tag{5.11}$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin(\varphi) \tag{5.12}$$

Das ist die bekannte Bewegungsgleichung des nichtlinearen Pendels.

b) Wir leiten dieselbe Gleichung über den Lagrange-Formalismus her. Zunächst stellen wir die Lagrangefunktion auf:

$$
\begin{aligned}
L = T - V &= \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - mgy && (5.13)\\
&= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy && (5.14)\\
&= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) - mgy && (5.15)\\
&= \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos(\varphi) && (5.16)
\end{aligned}
$$

Nun schreiben wir die Euler-Lagrange-Bewegungsgleichung für φ an:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= mgl\sin(\varphi) + \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) && (5.17)\\
&= mgl\sin(\varphi) + ml^2\ddot{\varphi} = 0 && (5.18)\\
\Rightarrow \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l}\sin(\varphi) && (5.19)
\end{aligned}
$$

Wir kommen im Lagrange Formalismus sehr viel schneller auf die Bewegungsgleichung.

c) Für die Herleitung der Bewegungsgleichung im Hamilton-Formalismus folgen wir den bekannten Schritten:

- Bestimmen des kanonischen Impulses $p_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}, t)$:

$$
p_\varphi(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} \tag{5.20}
$$

- Ausdrücken von $\dot{\varphi}$ als $\dot{\varphi}(\varphi, p_\varphi, t)$:

$$
p_\varphi = ml^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi}(\varphi, p_\varphi, t) = \frac{p_\varphi}{ml^2} \tag{5.21}
$$

- Durchführen der Legendretransformation auf $H(\varphi, p_\varphi, t)$:

$$
\begin{aligned}
H &= \dot{\varphi}(\varphi, p_\varphi, t)p_\varphi - L(\varphi, \dot{\varphi}(p_\varphi), t) && (5.22)\\
&= \frac{p_\varphi^2}{ml^2} - \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos(\varphi) && (5.23)\\
&= \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos(\varphi) && (5.24)
\end{aligned}
$$

- Bestimmen der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2} && (5.25)\\
\Rightarrow \dot{p}_\varphi &= ml^2\ddot{\varphi} && (5.26)\\
\dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgl\sin(\varphi) && (5.27)\\
\Rightarrow \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l}\sin(\varphi) && (5.28)
\end{aligned}
$$

5.2 SPASS MIT DREHIMPULSEN

a) Die Definition der Poisson-Klammern lautet:

$$\{f, g\}_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \tag{5.29}$$

Mit dieser berechnen wir nun $\{L_x, L_y\}_{\mathbf{r},\mathbf{p}}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\{L_x, L_y\}_{\mathbf{r},\mathbf{p}} =& \frac{\partial}{\partial r_i} \epsilon_{xjk} r_j p_k \frac{\partial}{\partial p_i} \epsilon_{ylm} r_l p_m & (5.30)\\
& - \frac{\partial}{\partial p_i} \epsilon_{xjk} r_j p_k \frac{\partial}{\partial r_i} \epsilon_{ylm} r_l p_m & (5.31)\\
=& \delta_{ij} \epsilon_{xjk} p_k \delta_{im} \epsilon_{ylm} r_l - \delta_{ik} \epsilon_{xjk} r_j \delta_{il} \epsilon_{ylm} p_m & (5.32)\\
=& \epsilon_{xik} \epsilon_{yli} r_l p_k - \epsilon_{xji} \epsilon_{yim} p_m r_j & (5.33)\\
=& - \epsilon_{ixk} \epsilon_{iyl} r_l p_k + \epsilon_{ixj} \epsilon_{iym} r_j p_m & (5.34)\\
=& - (\delta_{xy} \delta_{kl} - \delta_{xl} \delta_{ky}) r_l p_k & (5.35)\\
& + (\delta_{xy} \delta_{jm} - \delta_{xm} \delta_{jy}) r_j p_m & (5.36)\\
=& r_x p_y - r_y p_x = L_z & (5.37)
\end{aligned}$$

b) Nun berechnen wir die Poisson Klammer zweier beliebiger Drehimpuls-Komponenten mittels fundamentaler Poisson Klammern:

$$\begin{aligned}
\{L_i, L_j\} =& \{\epsilon_{ilm} r_l p_m, \epsilon_{jst} r_s p_t\} & (5.38)\\
=& \epsilon_{ilm} \epsilon_{jst} \{r_l p_m, r_s p_t\} & (5.39)\\
=& \epsilon_{ilm} \epsilon_{jst} (\{r_l p_m, r_s\} p_t + r_s \{r_l p_m, p_t\}) & (5.40)\\
=& \epsilon_{ilm} \epsilon_{jst} [r_l \{p_m, r_s\} p_t + r_s \{r_l, p_t\} p_m] & (5.41)\\
=& \epsilon_{ilm} \epsilon_{jst} (-r_l \delta_{ms} p_t + r_s \delta_{lt} p_m) & (5.42)\\
=& \epsilon_{ilm} (\epsilon_{jsl} r_s p_m - \epsilon_{jmt} r_l p_t) & (5.43)\\
=& (\delta_{is} \delta_{mj} - \delta_{ij} \delta_{ms}) r_s p_m + (\delta_{ij} \delta_{lt} - \delta_{it} \delta_{lj}) r_l p_t & (5.44)\\
=& r_i p_j - p_i r_j = \epsilon_{ijk} L_k & (5.45)
\end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen kann durch Einsetzen in die Indizes überprüft werden.

c) Nun berechnen wir $\{L^2, L_i\}$ zuerst allgemein und dann für $i = z$:

$$\begin{aligned}
\{L^2, L_i\} &= \{L_j L_j, L_i\} & (5.46)\\
&= 2L_j \{L_j, L_i\} & (5.47)\\
&= 2L_j \epsilon_{jik} L_k = 0 & (5.48)
\end{aligned}$$

da die Indizes (j, k) einmal symmetrisch und einmal antisymmetrisch vorkommt. Explizit ist

$$2L_j \epsilon_{jik} L_k = L_j L_k \epsilon_{jik} + L_k L_j \epsilon_{kij} = L_j L_k \epsilon_{jik} - L_k L_j \epsilon_{jik} = 0 \tag{5.49}$$

Daraus folgt dann auch speziell für $i = z$, dass $\{L^2, L_z\} = 0$.

a) Für kartesische Koordinaten in Indexschreibweise (Summenkonvention beachten!) erhält man für die z-Komponente des Drehimpulses:

$$L_z = \epsilon_{zjk} r_j p_k \tag{5.50}$$

$$\{L_z, H\} = \{\epsilon_{zjk} r_j p_k, \frac{1}{2m} p_i p_i - m\frac{K}{r}\} \tag{5.51}$$

$$= \frac{1}{2m}\epsilon_{zjk} p_k \{r_j, p_i p_i\} - mK\epsilon_{zjk} r_j \{p_k, \frac{1}{r}\} \tag{5.52}$$

Hierbei haben wir die Linearität der Poissonklammern sowie die Eigenschaften der fundamentalen Poissonklammern benutzt. Betrachten wir zunächst den 1.Term in 5.51 unter Anwendung der Produktregel:

$$\frac{1}{m}\epsilon_{zjk} p_k p_i \{r_j, p_i\} = \frac{1}{m}\epsilon_{zjk} p_k p_i \delta_{ij} = \frac{1}{m}\epsilon_{zjk} p_k p_j = 0 \tag{5.53}$$

Dieser Beitrag verschwindet aufgrund der Antisymmetrie des Levi-Civita Symbols. Der 2.Term in Gleichung (5.51) liefert unter Verwendung des Hinweises

$$\epsilon_{zjk} r_j \frac{r_k}{r^3} = 0 \tag{5.54}$$

und verschwindet ebenfalls durch die Symmetrie der indizes (j, k) in r und deren Antisymmetrie im Levi-Civita Symbols.

Betrachten wir nun das Quadrat des Drehimpulses,

$$L^2 = L_i L_i \tag{5.55}$$

$$= \epsilon_{ijk} r_j p_k \epsilon_{ilm} r_l p_m \tag{5.56}$$

$$= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) r_j p_k r_l p_m. \tag{5.57}$$

$$\{L^2, H\} = \{r_l r_l p_m p_m - r_m p_m r_l p_l, \frac{1}{2m} p_i p_i - m\frac{K}{\sqrt{r_i r_i}}\} = 0 \tag{5.58}$$

$$= \{r_l r_l p_m p_m, \frac{1}{2m} p_i p_i\} - \{r_l r_l p_m p_m, m\frac{K}{r}\} \tag{5.59}$$

$$- \{r_m p_m r_l p_l, \frac{1}{2m} p_i p_i\} + \{r_m p_m r_l p_l, m\frac{K}{r}\} \tag{5.60}$$

$$= \frac{1}{m} p_m p_m r_l \{r_l, p_i p_i\} - 4mK r_l r_l p_m \{p_m, \frac{1}{r}\} \tag{5.61}$$

$$- \frac{1}{m} p_m p_l r_m \{r_l, p_i p_i\} + 4mK r_m r_l p_m \{p_l, \frac{1}{r}\} \tag{5.62}$$

$$= \frac{2}{m} p_m p_m r_l p_i \{r_l, p_i\} - 4mK r_l r_l p_m \frac{r_m}{r^3} \tag{5.63}$$

$$- \frac{2}{m} p_m p_l r_m p_i \{r_l, p_i\} + 4mK r_m r_l p_m \frac{r_l}{r^3} \tag{5.64}$$

$$= \frac{2}{m} p_m p_m r_i p_i - \frac{2}{m} p_l p_l r_m p_m = 0 \tag{5.65}$$

Die Rechnung führt ebenfalls dazu, dass die Poissson Klammer von L^2 mit H verschwindet und somit das Quadrat des Drehimpulses erhalten ist.

b) Nun in Kugelkoordinaten:

$$\{L_z, H\} = \{p_\phi, \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2(\theta)}\right) - m\frac{K}{r}\} = 0 \tag{5.66}$$

Durch die geschickte Wahl der Koordinaten erkennt man sofort, dass L_z erhalten ist, da in H die Variable ϕ nicht vorkommt. Auch für L^2 benötigen wir keine lange Rechnung:

$$\{L^2, H\} = \{p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}, \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2(\theta)}\right) - m\frac{K}{r}\} \tag{5.67}$$

$$= \frac{1}{2mr^2}\{p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}, p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}\} = 0, \tag{5.68}$$

da die Poissonklammer antisymmetrisch ist, also $\{x, x\} = -\{x, x\} = 0$.

5.4 POISSON UND EIN STEIN

a) Wir berechnen zunächst die Poissonklammern:

$$\{z, H\} = \{z, \frac{p^2}{2m} + mgz\} \tag{5.69}$$

$$= \frac{1}{2m}\cdot 2p\{z, p\} = \frac{p}{m} \tag{5.70}$$

$$\{p, H\} = \{p, \frac{p^2}{2m} + mgz\} \tag{5.71}$$

$$= mg\{p, z\} = -mg \tag{5.72}$$

b) Nun zur Lösung der Bewegungsgleichungen. Zunächst berechnen wir die Taylorreihe

$$\exp\left(t\{\bullet, H(z_0, p_0)\}\right) = \left(1 + t\{\bullet, H\} + \frac{t^2}{2!}\{\bullet, H\}^2 + \frac{t^3}{3!}\{\bullet, H\}^3 + \dots\right).$$

Nun setzen wir iterativ in die höheren Potenzen von $\{\bullet, H\}$ ein.

$$\{\bullet, H\}\begin{pmatrix} z_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} z_0 \\ p_0 \end{pmatrix}, H(z_0, p_0)\right\} \tag{5.73}$$

$$= \begin{pmatrix} p_0/m \\ -mg \end{pmatrix}, \tag{5.74}$$

wie wir schon in *a)* berechnet haben.

$$\{\bullet, H\}^2\begin{pmatrix} z_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \left\{\{\begin{pmatrix} z_0 \\ p_0 \end{pmatrix}, H(z_0, p_0)\}, H(z_0, p_0)\right\} \tag{5.75}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} p_0/m \\ -mg \end{pmatrix}, H(z_0, p_0)\right\} \tag{5.76}$$

$$= \begin{pmatrix} -g \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.77}$$

was auch aus *a)* folgt. Alle weiteren Poisson Klammern

$$\left\{ \begin{pmatrix} -g \\ 0 \end{pmatrix}, H(z_0, p_0) \right\} = 0$$

verschwinden nun, da g (und auch 0) Konstanten sind. Damit ist in diesem Fall die Exponentialfunktion $\exp\left(t\{\bullet, H(z_0, p_0)\}\right)$ exakt durch die ersten 3 Terme der Taylorreihe gegeben, und die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ p_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} p_0/m \\ -mg \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -g \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.78}$$