2. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 13.12.2022

2

2.1 GEDÄMPFTER OSZILLATOR

Der gedämpfte harmonische Oszillator folgt der Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.1}$$

und ist ein nicht-konservatives System. Die Lagrangefunktion ist hat dann im Allgemeinen nicht mehr die einfache Gestalt $L = T - V$.

a) Nehmen Sie an, dass im gedämpften Oszillator sowohl die kinetische Energie T als auch die potentielle Energie V exponentiell gedämpft werden, und dass man somit $L(x, \dot{x}) = [T(\dot{x}) - V(x)]e^{-\alpha t}$ direkt hinschreiben kann. Bestimmen Sie α sodass sich mit diesem Ansatz aus der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung (2.1) ergibt.

Lösung:

Mit T und V eines ungedämpften harmonischen Oszillators lässt sich die Lagrangefunktion schreiben als

$$L(x, \dot{x}, t) = \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2\right] e^{-\alpha t} \tag{2.2}$$

Einsetzen in die Euler-Lagrange Gleichung liefert:

$$(m\ddot{x} - \alpha m\dot{x})\, e^{-\alpha t} + m\omega_0^2 x e^{-\alpha t} = 0 \tag{2.3}$$

$$\ddot{x} - \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.4}$$

Daraus lässt sich ablesen, dass $\alpha = -\frac{2}{\tau}$ gewählt werden muss.

b) Setzen Sie jetzt den Ansatz

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} y(t) \tag{2.5}$$

in die Bewegungsgleichung (2.1) ein, um eine Bewegungsgleichung für $y(t)$ zu erhalten. Wie lautet die Lagrangefunktion $L(y, \dot{y})$, die eingesetzt in die Euler-Lagrange-Gleichung diese "einfachere" Bewegungsgleichung ergibt? Verifizieren Sie ihre Antwort indem Sie die Euler-Lagrange-Gleichung in y für $L(y, \dot{y})$ berechnen.

Lösung:

Ableiten von (2.5) liefert:

$$\dot{x} = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\dot{y} - \frac{1}{\tau}\right), \qquad \ddot{x} = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\ddot{y} - \frac{2}{\tau}\dot{y} + \frac{1}{\tau^2}y\right) \tag{2.6}$$

Diese Terme können nun in (2.1) eingesetzt werden. Die Bewegungsgleichung vereinfacht sich auf folgende Form:

$$\ddot{y} + \underbrace{\left(\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}\right)}_{=:\omega_1^2} y = 0 \tag{2.7}$$

Dies entspricht genau der Bewegungsgleichung eines ungedämpften harmonischen Oszillators. Daher ist folgende Vermutung für die Lagrangefunktion naheliegend:

$$L(y, \dot{y}) = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} m \omega_1^2 y^2 \tag{2.8}$$

Einsetzen in die Euler-Lagrange Gleichung bestätigt diese Vermutung.

c) Drücken Sie nun in $L(y, \dot{y})$ das $y(t)$ und $\dot{y}(t)$ durch $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ aus um eine Lagrangefunktion des gedämpften Oszillators $L(x, \dot{x})$ zu erhalten. Verifizieren Sie auch hier ihr (zu (a) verschiedenes) Ergebnis indem Sie die Bewegungsgleichung (2.1) aus $L(x, \dot{x}, t)$ berechnen.

Lösung: Aus (2.5) folgt:

$$y(t) = e^{\frac{t}{\tau}} x(t), \qquad \dot{y}(t) = e^{\frac{t}{\tau}} \left(\dot{x} + \frac{1}{\tau} x \right) \tag{2.9}$$

Durch Einsetzen in die in b) gefundene Lagrangefunktion $L(y, \dot{y})$ und ausquadrieren erhält man

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m\, e^{2\frac{t}{\tau}} \left[\dot{x}^2 + \frac{2}{\tau} \dot{x} x + \left(\frac{2}{\tau^2} - \omega_0^2 \right) x^2 \right] \tag{2.10}$$

Einsetzen in die Euler-Lagrange Gleichung liefert die ursprüngliche Bewegungsgleichung.

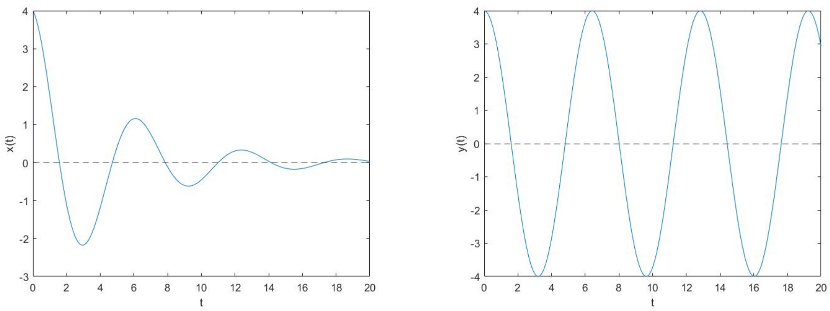
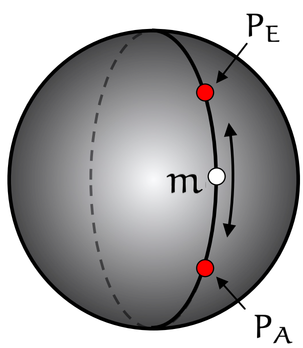


FIGURE 2.1: *Lösungen der BWGLs für x(t) und y(t) mit* $\omega_0 = 1$ *und* $\tau = 5$

2.2 TEILCHEN AUF DER KUGEL

Ein Teilchen der Masse m bewege sich reibungsfrei auf einer Kugel mit Radius R zwischen zwei Punkten $P_A = (\theta_A, \phi_A)$ and $P_E = (\theta_E, \phi_E)$ (Gravitation wird vernachlässigt). Sie können ihr Koordinatensystem so wählen, dass beide Punkte auf einem Längenkreis liegen (i.e. $\phi_A = \phi_E$) um das Problem effektiv eindimensional in θ zu machen. Lagrangefunktion L und Bewegungsgleichung des Systems ergeben sich dann zu:



$$L = \frac{m}{2} R^2 \left(\dot{\theta}^2 \right) \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{\theta} = 0 \tag{2.11}$$

a) Lösen Sie die Bewegungsgleichung mit den Randbedingungen $\theta(0) = \theta_A$ und $\theta(\tau) = \theta_B$. Zeigen Sie, dass es für die meisten θ_A und θ_B abzählbar unendlich viele Lösungen gibt (unter der Annahme, dass beliebig hohe Geschwindigkeiten möglich sind). Für welche θ_A und θ_B existieren überabzählbar unendlich viele?

b) Berechnen Sie die Wirkungen

$$S_n = \int_0^\tau L(\theta_n(t), \dot{\theta}_n(t), t)dt \tag{2.12}$$

für zwei verschieden der Lösungen aus (a) um zu zeigen, dass diese verschieden sind.

c) Jetzt betrachten wir einen unphysikalischen Pfad $(\theta_\epsilon, \phi_\epsilon)$ der durch ϵ parametrisiert sei:

$$\begin{pmatrix} \theta_\epsilon(t) \\ \phi_\epsilon(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} + \omega_n t \\ \epsilon t(\tau - t) \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Da nunmehr auch Bewegung in ϕ-Richtung zugelassen ist, müssen Sie auch diese Komponente in L berücksichtigen:

$$L = \frac{m}{2} R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)\right) \tag{2.14}$$

Für welchen Wert von ε wird die Wirkung extremal? Interpretieren Sie ihr Ergebnis.

Lösung:

a) Zuerst lösen wir die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \omega t + \theta_0 \tag{2.15}$$

Aus den Randbedingungen folgt:

$$\theta(0) = \theta_0 = \theta_A \quad , \quad \theta(\tau) = \omega\tau + \theta_A = \theta_E \tag{2.16}$$

Da jedoch die Kreisoberfläche periodisch in θ ist, lassen sich abzählbar unendlich viele Punkte als θ_E identifizieren: $\theta_E \equiv \theta_E + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. So ergeben sich auch abzählbar viele Möglichkeiten für das ω:

$$\theta_n(\tau) = \omega_n\tau + \theta_A = \theta_E + 2\pi n \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{\theta_E - \theta_A + 2\pi n}{\tau} \tag{2.17}$$

Falls die beiden Punkte auf gegenüberliegenden Polen der Kugeloberfläche sitzen, gibts es sogar uberabzählbar viele Lösungen, da das gesamte System zusätzlich noch symmetrisch in ϕ ist.

b) Wir berechnen nun die Wirkung S:

$$S_n = \int_0^\tau L(\theta_n(t), \dot{\theta}_n(t), t)dt \quad \text{mit} \quad \theta_n(t) = \omega_n t + \theta_A \tag{2.18}$$

$$S_n = \int_0^\tau \frac{m}{2} R^2 \omega_n^2 dt = \frac{m}{2} R^2 \omega_n^2 \tau = \frac{mR^2}{2\tau}(\theta_E - \theta_A + 2\pi n)^2 \tag{2.19}$$

Im Allgemeinen hängt die Wirkung S_n davon ab, wie oft die Kugel umrundet wird, also von n.

c) Wir betrachten nun einen unphysikalischen Pfad, der folgendermaßen parametrisiert wurde:

$$\begin{pmatrix} \theta_\epsilon(t) \\ \phi_\epsilon(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} + \omega_n t \\ \epsilon t(\tau - t) \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Die Lagrange-Funktion ergibt sich zu:

$$L = \frac{mR^2}{2}(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta) = \frac{mR^2}{2}\left(\omega_n^2 + \epsilon^2(\tau - 2t)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \omega_n t\right)\right)$$

$$S(\epsilon) = \int_0^\tau L(\epsilon)\,dt = \underbrace{\int_0^\tau \frac{mR^2}{2}\omega_n^2\,dt}_{S(0)} + \frac{mR^2}{2}\epsilon^2 \underbrace{\int_0^\tau (\tau - 2t)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \omega_n t\right) dt}_{>0}$$

Da sich das 2-te Integral als größer 0 abschätzen lässt, liegt das Minimum der Wirkung bei $\epsilon = 0$.

2.3 GELADENES TEILCHEN IN ELEKTROMAGNETISCHEN FELDERN

Betrachten Sie ein Teilchen (Masse m, Ladung q) in einem homogenen elektrischen $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_y$ und magnetischen Feld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ (elektrostatisches Potential $\Phi = -Ey$, Vektorpotential $\mathbf{A} = Bx\mathbf{e}_y$).

a) Schreiben Sie die Lagrangefunktion L des Systems an und bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen.

b) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung für $E = 0$ eine gleichmäßige kreisförmige Bewegung in der (x, y)-Ebene ist.

c) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung für $B = 0$ eine gleichförmig beschleunigte geradlinige Bewegung in y-Richtung ist.

d) Wie sieht dann die allgemeine Lösung für $E, B \neq 0$ qualitativ aus? Finden Sie Anfangsbedingungen für:

(I) Das Teilchen bewegt sich manchmal entgegen der Richtung von $\mathbf{E}$.
(II) Das Teilchen kommt manchmal zum Stillstand.

Visualiseren sie schematisch die jeweiligen Trajektorien!

Lösung:

a) Die Lorentzkraft $\mathbf{F}_L = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ lässt sich durch ein Potential V beschreiben, sodass $\mathbf{F}_L = -\nabla V$.

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2.21}$$

$$\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} \tag{2.22}$$

$$\mathbf{F}_L = -q(\nabla\Phi + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}}_{=\frac{d\mathbf{A}}{dt}=0} - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})) \tag{2.23}$$

damit kommen wir auf unser Potential $V = q(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$ und unserer Lagrangefunktion $L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 + q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - \Phi)$.
womit wir drei Euler-Lagrange-Gleichungen erhalten

$$m\dot{v}_y + qBv_x - qE = 0 \tag{2.24}$$

$$m\dot{v}_x - qBv_y = 0 \tag{2.25}$$

$$m\dot{v}_z = 0 \to z = v_{z,0}t + const. \tag{2.26}$$

b) Für $E = 0$:

$$\dot{v}_y = -\frac{qB}{m}v_x \quad , \quad \dot{v}_x = \frac{qB}{m}v_y \tag{2.27}$$

$$\dot{v}_x = -\frac{m}{qB}\ddot{v}_y \quad , \quad \dot{v}_y = \frac{m}{qB}\ddot{v}_x \tag{2.28}$$

$$\ddot{v}_x = -\underbrace{\left(\frac{qB}{m}\right)^2}_{\omega^2} v_x \quad , \quad \ddot{v}_y = -\underbrace{\left(\frac{qB}{m}\right)^2}_{\omega^2} v_y \tag{2.29}$$

$$v_x = C \sin \omega t + D \cos \omega t \quad , \quad v_y = -D \sin \omega t + C \cos \omega t \tag{2.30}$$

bzw. explizit für x,y:

$$x = -\frac{C}{\omega} \cos \omega t + \frac{D}{\omega} \sin \omega t + const. \tag{2.31}$$

$$y = \frac{D}{\omega} \cos \omega t + \frac{C}{\omega} \sin \omega t + const. \tag{2.32}$$

Wir sehen, dass das einer gleichmäßigen Kreisbewegung in der (x,y) Ebene entspricht.

c) Für $B = 0$:

$$\dot{v}_y = \frac{q}{m}E \to v_y = \frac{q}{m}Et + const. \tag{2.33}$$

und $\dot{v}_x = 0$, $\dot{v}_z = 0$.
Damit folgt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung in y-Richtung.

d) Für $B, E \neq 0$ erhalten wir die inhomogene DGL:

$$\ddot{v}_x + \omega^2 v_x = \left(\frac{q}{m}\right)^2 BE \tag{2.34}$$

Die homogene Gleichung haben wir bereits gelöst, als Partikulärlösung versuchen wir den Ansatz $v_x = const.$:

$$0 + \frac{q^2}{m^2}B^2 v_x = -\frac{q^2}{m^2}BE \to v_x = \frac{E}{B} \tag{2.35}$$

Durch Addition von homogener und partikulärer Lösung erhalten wir schließlich

$$v_x = C \sin \omega t + D \cos \omega t + \frac{E}{B} \tag{2.36}$$

Für y bleibt die DGL homogen, auch da haben wir die Lösunge bereits errechnet:

$$v_y = -D \sin \omega t + C \cos \omega t \tag{2.37}$$

in Ortskoordinaten

$$x = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t + \frac{E}{B} t + \text{const.} \tag{2.38}$$

$$y = -\beta \cos \omega t + \alpha \sin \omega + \text{const.} \tag{2.39}$$

wobei wir durch die Anfangsbedingen $\alpha = v_{y,0}/\omega$ und $\beta = \frac{v_{x,0} - E/B}{\omega}$ bestimmen. Aus den Anfangsbedingungen $v_{x,0} = 0$, $v_{y,0} = 0$ folgt

$$v_x = \frac{E}{B}(1 - \cos \omega t) \quad , \quad v_y = \frac{E}{B} \sin \omega t \tag{2.40}$$

Wir sehen dass periodisch für $\omega t = 2n\pi \rightarrow v_x = v_y = 0$, also II) erfüllt ist und für $\omega t \in ((2m+1)\pi, (2m+2)\pi) \rightarrow v_y < 0$, also I) erfüllt ist. Mit $x_0 = 0, y_0 = 0$

$$x = r(\omega t - \sin \omega t) \quad , \quad y = r(1 - \cos \omega t) \tag{2.41}$$

erhalten wir die Gleichungen eines Zykloids, wobei $r = \frac{E}{B\omega}$ den Radius dieses Zykloids bestimmt.

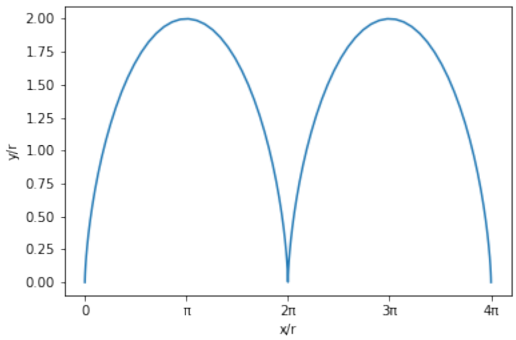


FIGURE 2.2: *Zykloide Bewegung des Teilchens.*