

3.1 PHASENRAUMPORTRÄTS

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einer Raumdimension unter Einfluss des folgenden Potentials:

$$V(x) = V_0 x^2 e^{-\alpha x^2}, \quad V_0 \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad (3.1)$$

- Skizzieren sie das Potential $V(x)$ des Systems und bestimmen sie die Gleichgewichtspositionen x_G des Systems (i.e. die Extremalstelle von $V(x)$).
- Stellen sie die Lagrangefunktion des Systems auf und führen Sie eine Legendre Transformation durch um die Hamiltonfunktion des Systems zu bestimmen.
- Bestimmen sie das Hamiltonsche Vektorfeld $v_H(x, p)$ und visualisieren sie es in einem Phasenraumporträt. Beschreiben Sie anhand dieses Porträts verbal die Bewegung des Teilchens in der Nähe der Gleichgewichtspositionen x_G sowie für $x > \sqrt{1/\alpha}$.

Hinweis zu c): Setzen sie $V_0 = 1$, $\alpha = 1$ und zeichnen sie einzelne Pfeile des Vektorfelds für ein Raster von $x \in [-2, 2]$ und $p \in [-2, 2]$. Kontrollieren/Verfeinern Sie ihre Handskizze danach mit Hilfe von e.g. <https://www.geogebra.org/m/QPE4PaDZ>.

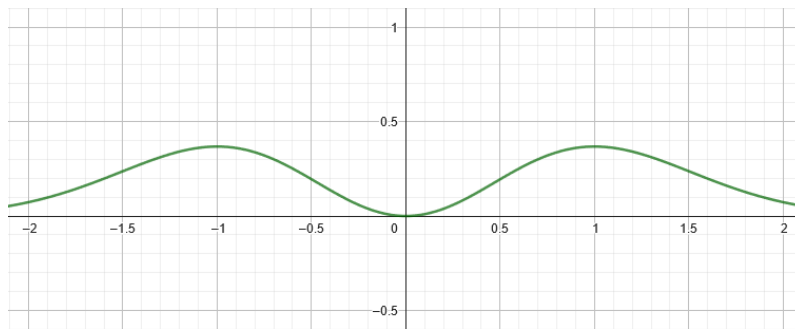
Lösung:


FIGURE 3.1: $V(x)$ mit $V_0 = \alpha = 1$

- Um die Extremalstellen des Potentials zu bestimmen wird dessen Ableitung 0 gesetzt. Dies führt auf folgende Gleichung:

$$x - \alpha x^3 = 0 \quad (3.2)$$

Die Lösungen sind $x_{G1} = 0$ und $x_{G23} = \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$. x_{G1} ist eine stabile Gleichgewichtsposition, während x_{G2} und x_{G3} labile Gleichgewichtspositionen sind.

- Die Lagrangefunktion wird wie folgt berechnet:

$$L = T - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V_0 x^2 e^{-\alpha x^2} \quad (3.3)$$

Um die Legendre-Transformation durchzuführen, wird zunächst der generalisierte Impuls p berechnet:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \dot{x} = \frac{p}{m} \quad (3.4)$$

Es kann nun die Hamiltonfunktion berechnet werden:

$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + V_0 x^2 e^{-\alpha x^2} = \frac{p^2}{2m} + V_0 x^2 e^{-\alpha x^2} \quad (3.5)$$

Konsistenzcheck: Da das Potential nicht explizit zeitabhängig ist, stimmt der Wert der Hamiltonfunktion mit der Gesamtenergie überein. (Also: $H = T + V$)

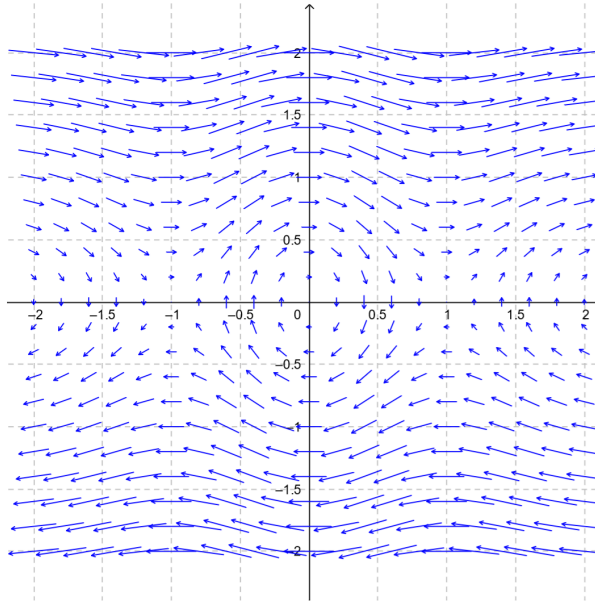


FIGURE 3.2: Phasenraumportrait für $V_0 = \alpha = m = 1$

c) Das Hamiltonsche Vektorfeld ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$v_H = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ 2x(\alpha x^2 - 1)V_0 e^{-\alpha x^2} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Für das Phasenraumportrait werden V_0, m, α zu 1 gesetzt:

$$v_H = \begin{pmatrix} p \\ 2x(x^2 - 1)e^{-x^2} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Für das händische Erstellen des Phasenraumportraits ist es nützlich zu erkennen, dass $-\frac{\partial H}{\partial x}$ mit $-\frac{\partial V}{\partial x}$ übereinstimmt. Aus der Skizze des Potentials kann $\frac{\partial V}{\partial x}$ qualitativ an verschiedenen Punkten abgeschätzt werden. Wie im Hinweis bereits erwähnt, ist es ausreichend nur den Bereich $[-2, 2] \times [-2, 2]$ darzustellen, da dieser alle interessanten Punkte des Potentials (die Gleichgewichtslagen) enthält.

Die Gleichgewichtslagen des Potentials liegen bei $x = 0$ und $x = \pm 1$. Startet das Teilchen mit $x \in (-1, 1)$, so ist die Bahn im Phasenraum geschlossen für hinreichend kleine Anfangs-Impulse. Startet das Teilchen innerhalb der Potentialsenke mit einer zu kleinen kinetischen Energie um die Potentialsenke zu verlassen, wird nach der Periodendauer der ursprüngliche Anfangszustand (also Anfangsort und Anfangsimpuls) wieder erreicht. Die Bahnkurve im Phasenraum ist also geschlossen.

Startet das Teilchen bei $x > \frac{1}{\sqrt{a}}$ bzw. $x < -\frac{1}{\sqrt{a}}$, so sieht man, dass das Hamiltonsche Vektorfeld das Teilchen von diesen labilen Gleichgewichtslagen weg führt. Das Teilchen bewegt sich schließlich ins unendliche. Die Bahn im Phasenraumporträt nähert sich asymptotisch der Geraden $p = \sqrt{2mE}$ an, da für $x \rightarrow \infty$ die gesamte Energie in kinetische Energie übergeht.

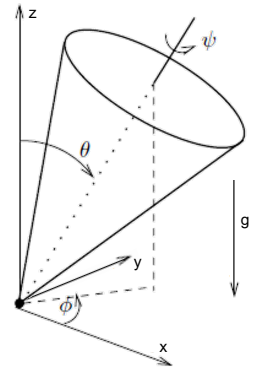
3.2 DER SYMMETRISCHE KREISEL

Beschrieben durch die Eulerwinkel θ, ψ, ϕ ist die Hamiltonfunktion des symmetrischen Kreisels mit fixem Auflagepunkt im homogenen Gravitationsfeld gegeben durch:

$$H(\theta, \phi, \psi, p_\theta, p_\phi, p_\psi) = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{p_\phi^2}{2I_1} \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + gm \cos(\theta) \quad (3.8)$$

I_1 und I_3 sind dabei Trägheitsmomente um die relevanten Achsen und m sei die Masse des Kreisels.

- Identifizieren Sie alle zyklischen Koordinaten des Systems. Welche Erhaltungsgrößen sind damit verknüpft?
- Wir betrachten einen Unterraum aller Lösungen der durch gleichsetzen der Konstanten der Bewegung p_ϕ und p_ψ mit $p_\phi = p_\psi = p$ charakterisiert ist. Damit erhalten wir ein effektives eindimensionales Problem. Identifizieren Sie ein effektives Potential $V(\theta)$ und skizzieren sie dieses für verschiedene Werte von $p < p_c$, $p = p_c$, $p > p_c$ ($p_c = \sqrt{4gmI_1}$). Setzen Sie die restlichen Variablen alle auf 1, es geht hier nur um den qualitativen Verlauf des Potentials). Welche Änderung der Extremalstellen dieses Potentials als Funktion von p beobachten Sie? Interpretieren Sie dies physikalisch.
- Bestimmen Sie das Hamiltonsche Vektorfeld $v_H(\theta, p_\theta)$ und visualisieren sie es in einem Phasenraumporträt für die beiden Fälle $p < p_c$ und $p > p_c$. Beschreiben anhand dieses Porträts verbal die möglichen Bewegungen des Kreisels.



Solution:

$$H(\theta, \phi, \psi, p_\theta, p_\phi, p_\psi) = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{p_\phi^2}{2I_1} \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + gm \cos(\theta) \quad (3.9)$$

Cyclic coordinates of the system are defined by

$$\frac{\partial L}{\partial q_c} = 0 \quad \text{or} \quad -\frac{\partial H}{\partial q_c} = 0. \quad (3.10)$$

For the symmetric top, we can immediately see, that in the Hamiltonian function, the angle variables ψ and φ do not appear. Thus, these two angles are cyclic variables of the system and the two momenta p_ψ and p_φ are conserved quantities. The same argument is true for the time variable, giving as conserved quantity the energy E of the system.

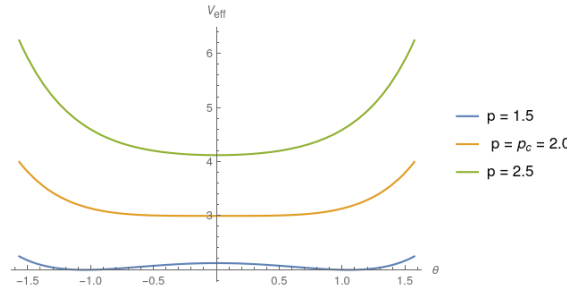
We now explore the case in which $p_\psi = p_\varphi = p$. The Hamiltonian now reads

$$H(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{p^2}{2I_3} + \frac{p^2}{2I_1} \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + gm \cos(\theta) \quad (3.11)$$

Thus the problem becomes 1-dimensional and we can identify an effective potential

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{p^2}{2I_3} + \frac{p^2}{2I_1} \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + gm \cos(\theta). \quad (3.12)$$

The potential contains the parameter p and depends on the angle θ . There is a critical momentum $p_c = \sqrt{4gmI_1}$ at which the potential, at the point $\theta = 0$ changes from a minimum to a local maximum. For a plot see the attached Mathematica notebook. We observe that below the critical momentum, at the angle $\theta = 0$, the potential shows a local maximum, whereas above p_c a minimum. At the critical point, $p = p_c$, we have an inflection point, i.e. the curve flattens.



Interpretation: In the case $p > p_c$, the top is stable when standing vertically. For $p < p_c$ the top is not stable standing vertically (local maximum). Thus, if slightly displaced from the vertical axis, it would fall. The curve with $p = p_c$ represents the transition point from a stable to an unstable top. From one minimum, we get three "points of interest": two local minima and one local maximum.

The **Hamiltonian vector-field** is defined as

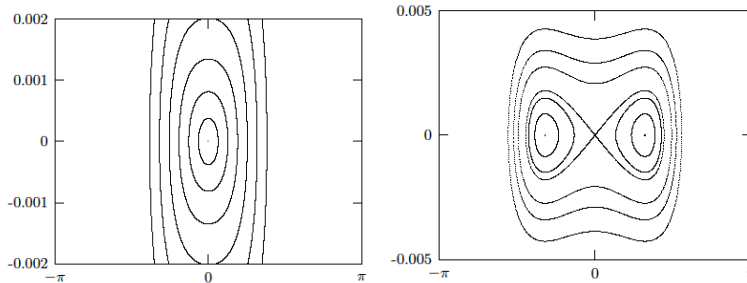
$$\mathbf{v}_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \quad (3.13)$$

For the given Hamiltonian we obtain

$$\mathbf{v}_H(\theta, p_\theta) = \left(\frac{p_\theta}{I_1}, gm \sin(\theta) - \frac{p^2}{I_1} \cos^{-2}\left(\frac{\theta}{2}\right) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^T \quad (3.14)$$

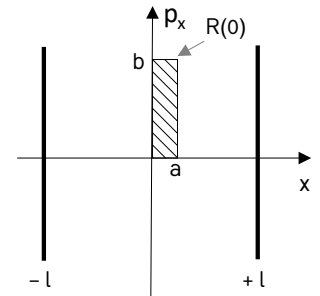
By changing the momentum p , You should observe different phase spaces with different behaviors. In particular, for $p > p_c$, i.e. the stable configuration, one should get loops around $\theta = 0$. By displacing the top slightly, one moves from one loop to another one. The top stays nearly vertical in this case.

In the unstable case $p < p_c$, the trajectories that approach the vertical are asymptotic (they take an infinite amount of time to reach it). If the top is displaced slightly from the vertical then the trajectories loop around another center with nonzero θ . A top started at the center point of the loop stays there, and one started near this equilibrium point loops stably around it.



3.3 HAMILTONSCHE DYNAMIK

Betrachten Sie ein freies Teilchen (i.e. $V(x)=0$) der Masse $m = 1$ (in einer Dimension) in einer Box mit perfekt reflektierenden Wänden an $x = \pm l$. Wir interessieren uns für die Zeitentwicklung einer Region \mathcal{R} im Phasenraum (x, p) . \mathcal{R} sei dabei zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Rechteck mit Eckkoordinaten $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, (a, b) , siehe Skizze.



- a) Schreiben Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen an und lösen Sie diese für 4 Anfangsbedingungen die die 4 Eckpunkte von $\mathcal{R}(t = 0)$ darstellen für Zeiten $t < l/b$.

Lösung: Die Hamiltonfunktion eines freien Teilchens $H(x, p) = \frac{p^2}{2m}$ ergibt die beiden Bewegungsgleichungen

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

und daraus

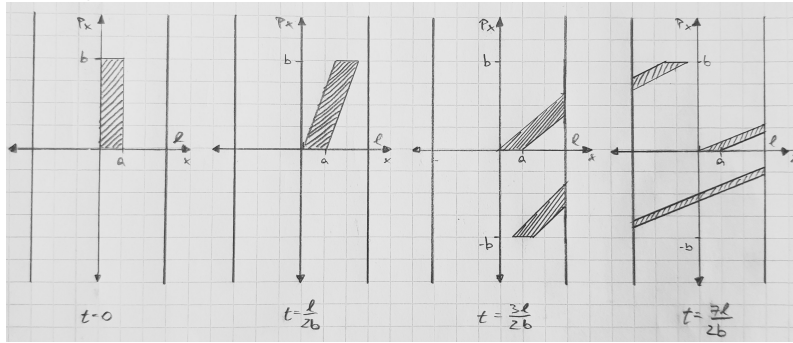
$$x(t) = x_0 + p_0 t, \quad p(t) = p_0.$$

Die Anfangsbedingungen der vier Eckpunkte von $\mathcal{R}(t = 0)$ führen damit zu folgenden Bewegungen:

- (i) $x(0) = 0, p(0) = 0 \Rightarrow x(t) = 0, p(t) = 0,$
- (ii) $x(0) = a, p(0) = 0 \Rightarrow x(t) = a, p(t) = 0,$
- (iii) $x(0) = 0, p(0) = b \Rightarrow x(t) = bt, p(t) = b \quad \text{für } t < \frac{l}{b},$
- (iv) $x(0) = a, p(0) = b \Rightarrow x(t) = a + bt, p(t) = b \quad \text{für } t < \frac{l-a}{b}.$

- b) Für Zeiten $t > l/b$ müssen sie entsprechende Vorzeichenwechsel des Impulses berücksichtigen (elastische Reflexion). Zeichnen sie $\mathcal{R}(t)$ für Zeiten $t = 0$, $t = \frac{1}{2b}$, $t = \frac{3l}{2b}$ und $t = \frac{7}{2b}$. Beschreiben sie ihre Skizzen verbal.

Lösung:



- c) Berechnen sie den in $\mathcal{R}(t)$ eingeschlossenen Flächeninhalt für $t > 0$? Wie und warum ändert sich $\mathcal{R}(t)$ (nicht)?

Lösung: Die eingeschlossenen Phasenraumfläche ist stets ein gestückeltes Parallelogramm mit konstanter Grundlänge a und Höhe b , daher ergibt sich

$$\mathcal{R}(t) = ab.$$

Dies steht im Einklang mit dem Liouville'schen Theorem, welches die Konservierung beliebiger Phasenraumvolumina besagt,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V}(t) = 0.$$

3.4 POISSON KLAMMERN

- a) Berechnen sie die Poisson Klammern für die Drehimpulse $j_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta p_\gamma$ mit den Impulsen p_λ und mit den Positionen x_λ .

Lösung: Für die Auswertung der Poisson Klammern kann die Linearität und die Produktregel benutzt werden, um den Ausdruck auf fundamentale Poisson Klammern zurück zu führen. Für eine generalisierte Koordinate \mathbf{q} und dem generalisierten Impuls \mathbf{p} gelten die fundamentalen Poisson Klammern.

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad \{p_i, p_j\} = 0 \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

Damit ergeben sich die Poisson Klammern des Drehimpulses j_α mit dem Impuls bzw. der Position zu:

$$\begin{aligned} \{\epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta p_\gamma, p_\lambda\} &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p_\gamma \{x_\beta, p_\lambda\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p_\gamma \delta_{\beta\lambda} = \epsilon_{\alpha\lambda\gamma} p_\gamma \\ \{\epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta p_\gamma, x_\lambda\} &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta \{p_\gamma, x_\lambda\} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta \delta_{\gamma\lambda} = \epsilon_{\beta\alpha\lambda} x_\beta \end{aligned}$$

Hier wurde außerdem die Antisymmetrie des Levi-Civita-Symbols benutzt (Vorzeichenwechsel bei einer Permutation der Indices).

- b) Durch innere Produkte lassen sich aus Impulsen und Positionen skalare Funktionen $\sum_\lambda x_\lambda x_\lambda$, $\sum_\lambda x_\lambda p_\lambda$ und $\sum_\lambda p_\lambda p_\lambda$ bilden. Werten sie deren Poissonklammern mit j_α aus.

Lösung: Im Folgenden wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, d.h. wenn eine Summe über zwei gleiche Indices gebildet

wird, wird das Summenzeichen nicht extra angeschrieben. Abermals kann die Produktregel angewandt werden, um die Poisson Klammern mittels der fundamentalen Poisson Klammern aufzulösen.

$$\begin{aligned}
\{\epsilon_{\alpha\beta\gamma}x_\beta p_\gamma, x_\lambda x_\lambda\} &= 2x_\lambda\{\epsilon_{\alpha\beta\gamma}x_\beta p_\gamma, x_\lambda\} = 2x_\lambda x_\beta \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\{p_\gamma, x_\lambda\} \\
&= -2x_\lambda x_\beta \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\delta_{\lambda\gamma} = 2x_\gamma x_\beta \epsilon_{\beta\alpha\gamma} = 0 \\
\{\epsilon_{\alpha\beta\gamma}x_\beta p_\gamma, p_\lambda p_\lambda\} &= 2p_\lambda\{\epsilon_{\alpha\beta\gamma}x_\beta p_\gamma, p_\lambda\} = 2p_\lambda p_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\{x_\beta, p_\lambda\} \\
&= 2p_\lambda p_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\delta_{\beta\lambda} = 2p_\beta p_\gamma \epsilon_{\beta\alpha\gamma} = 0
\end{aligned}$$

Das Verschwinden der jeweils letzten Ausdrücke ergibt sich aus Symmetrien: in der ersten Klammer ist zB $x_\gamma x_\beta$ symmetrisch in β und γ , aber der Epsilon-Tensor total antisymmetrisch, ist dieser Ausdruck antisymmetrisch in β und γ . Eine Summe über einen antisymmetrischen Tensor im Produkt mit einem symmetrischen verschwindet. Analoges gilt für die Vereinfachung der zweiten Poisson Klammer.

Die Poisson Klammer des Drehimpulses mit der dritten Funktion verschwindet ebenso.

$$\begin{aligned}
\{\epsilon_{\alpha\beta\gamma}x_\beta p_\gamma, x_\lambda p_\lambda\} &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma}p_\gamma x_\lambda\{x_\beta, p_\lambda\} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}x_\beta p_\lambda\{p_\gamma, x_\lambda\} \\
&= \epsilon_{\alpha\beta\gamma}p_\gamma x_\lambda\delta_{\beta\lambda} - \epsilon_{\alpha\beta\gamma}x_\beta p_\lambda\delta_{\gamma\lambda} \\
&= \epsilon_{\alpha\lambda\gamma}p_\gamma x_\lambda - \epsilon_{\alpha\beta\lambda}x_\beta p_\lambda \\
&= \epsilon_{\alpha\lambda\gamma}p_\gamma x_\lambda - \epsilon_{\alpha\lambda\gamma}p_\gamma x_\lambda = 0
\end{aligned}$$

Durch die Umbenennung der abgesättigten Indices im zweiten Term, also jener über die summiert wird, erkennt man, dass auch diese Poisson Klammer verschwindet.