4. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 17.01.2023

4

4.1 POISSON KLAMMERN

Zeigen Sie, dass in Hamiltonschen Systemen die Produktregel für Zeitableitung auf Poisson Klammern von beliebigen Phasenraumfunktionen $f(\eta, t)$, $g(\eta, t)$ gilt, i.e.:

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \{\dot{f}, g\} + \{f, \dot{g}\} \tag{4.1}$$

Was folgt daraus wenn sie für ein System bereits zwei Erhaltungsgrößen ($\frac{d}{dt} f = 0$ und $\frac{d}{dt} g = 0$) kennen?

Lösung:
Da $f(\eta, t)$ und $g(\eta, t)$ beliebige Phasenraumfunktionen sind, gilt:

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \{\{f, g\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} \tag{4.2}$$

Nun können die beiden Terme auf der rechten Seite der Gleichung separat betrachtet werden:

$$\{\{f, g\}, H\} = -\{\{H, f\}, g\} - \{\{g, H\}, f\} = \{\{f, H\}, g\} + \{f, \{g, H\}\} \tag{4.3}$$

Hierbei wurde im ersten Schritt die Jacobi-Identität und im zweiten die Antisymmetrie der Poisson Klammern ausgenutzt. Der zweite Term kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \sum_j \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial q_j} \right) \tag{4.4}$$

$$= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} \tag{4.5}$$

Die Reihenfolge der partiellen (!) Ableitungen kann aufgrund des Satzes von Schwarz vertauscht werden. Schlussendlich erhält man

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \{\{f, H\}, g\} + \{f, \{g, H\}\} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} \tag{4.6}$$

$$= \left\{ \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t} \right\} = \{\dot{f}, g\} + \{f, \dot{g}\} \tag{4.7}$$

Falls f und g Erhaltungsgrößen des Systems sind ($\frac{d}{dt} f = 0$ und $\frac{d}{dt} g = 0$), dann ist auch $\{f, g\}$ erhalten.

4.2 KANONISCHE TRANSFORMATIONEN

Betrachten Sie die Koordinatentransformation für ein eindimensionales System $H(q, p)$,

$$Q = q^k p^l \qquad k, l \in \mathbb{R}, \qquad P = q^m p^n \qquad m, n \in \mathbb{R}$$

a) Wie müssen Sie k, l, m, n wählen um die Transformation kanonisch zu machen? Welche Transformation ergbit sich für m=0?

b) Bestimmen Sie eine erzeugende Funktion vom Typ $F_1(q, Q)$. Wie sähe eine erzeugende Funktion vom Typ $F_2(q, P)$ aus?

c) Unter welchen Bedingungen an α und β ist die folgende Transformation für ein eindimensionales System kanonisch?

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\alpha p}{q} \\ P &= \beta q^2 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Bestimmen sie weiters eine erzeugende Funktion zu dieser Transformation.

d) Betrachten wir nunmehr ein System mit 2 Freiheitsgraden $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$. Ist die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 q_2, \qquad & P_1 &= \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1} + 1 \\ Q_2 &= q_1 + q_2, \qquad & P_2 &= \frac{q_2 p_2 - q_1 p_1}{q_2 - q_1} - (q_2 + q_1) \end{aligned} \tag{4.9}$$

kanonisch?

Lösung:

a) Eine notwendige und hinreichende Bedingung, dass unsere Koordinatentransformationen kanonisch sind, ist die Invarianz der Poissonklammern:

$$1 \stackrel{!}{=} \{Q, P\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = (kn - lm)q^{k+m-1}p^{l+n-1} \tag{4.10}$$

Aus einem Koeffizientenvergleich ergeben sich 3 Gleichungen:

$$kn - lm = 1 \qquad k + m - 1 = 0 \qquad l + n - 1 = 0 \tag{4.11}$$

Nun drücken wir 3 der Variablen durch die vierte (in diesem Falle n) aus:

$$k = 2 - n \qquad l = 1 - n \qquad m = n - 1 \tag{4.12}$$

Unsere Koordinatentransformation hängt nur mehr von einer Variablen $n \in \mathbb{R}$ ab :

$$Q = q^{2-n}p^{1-n} \qquad P = q^{n-1}p^n \tag{4.13}$$

Für den Fall, dass $m = 0$ ergibt sich:

$$k = 1 \qquad l = 0 \qquad m = 0 \qquad n = 1 \tag{4.14}$$

Wir erhalten also $Q = q$ und $P = p$.

b) Wir bestimmen nun eine erzeugende Funktion des Typs $F_1(q, Q)$ zu der Koordinatentransformation. Für die erzeugende Funktion muss gelten, dass:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \qquad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \tag{4.15}$$

Diese Bedingung setzen wir ein in die Koordinatentransformationen:

$$Q = q^{2-n} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q} \right)^{1-n} \qquad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = q^{n-1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q} \right)^{n} \tag{4.16}$$

Wir formen die erste Differentialgleichung um und integrieren, um F_1 zu bekommen:

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = (Qq^{n-2})^{\frac{1}{1-n}} \quad \Rightarrow \quad F_1 = (n-1)(Qq^{-1})^{\frac{1}{1-n}} + C(Q) \tag{4.17}$$

Unsere erzeugende Funktion F_1 ist nun eindeutig bestimmt, bis auf einen Term, der ausschließlich von Q abhängen kann. Durch Ableiten der Funktion F_1 nach Q und einem Vergleich mit der zweiten Gleichung in (4.16) ergibt sich, dass $\frac{\partial C(Q)}{\partial Q} = 0$, also dass $C = const$:

$$F_1(q, Q) = (n-1)(Qq^{-1})^{\frac{1}{1-n}} + C \tag{4.18}$$

Für $F_2(q, P)$ ergibt sich analog:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \qquad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \tag{4.19}$$

Invertieren und anschließendes Integrieren ergibt:

$$p = (Pq^{1-n})^{\frac{1}{n}} = \frac{\partial F_2}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad F_2 = n(Pq)^{\frac{1}{n}} + D(P) \tag{4.20}$$

Erneut leiten wir F_2 nach P ab und vergleichen es mit der zweiten Gleichung in (4.19) und stellen fest, dass $D = const$:

$$F_2(q, P) = n(Pq)^{\frac{1}{n}} + D \tag{4.21}$$

c) Wir ermitteln wieder eine erzeugende Funktion vom Typ $F_1(q, Q)$:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \qquad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \tag{4.22}$$

Für die gegebene Koordinatentransformation folgt:

$$Q = \alpha q^{-1} p = \alpha q^{-1} \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_1}{\partial q} = \frac{1}{\alpha} Qq \tag{4.23}$$

Nach dem Integrieren erhalten wir:

$$F_1(q, Q) = \frac{1}{2\alpha} Qq^2 + \tilde{C}(Q) \tag{4.24}$$

Durch das Ableiten der erzeugenden Funktion $F_1(q, Q)$ nach Q und Vergleichen mit der zweiten Gleichung in (4.22) folgt:

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{q^2}{2\alpha} + \frac{\partial \tilde{C}(Q)}{\partial Q} \stackrel{!}{=} -P = -\beta q^2 \tag{4.25}$$

Aus der Gleichung folgt , dass $-2\alpha\beta = 1$ und dass $\tilde{C} = const$:

$$F_1(q, Q) = \frac{1}{2\alpha} Qq^2 + \tilde{C} \tag{4.26}$$

d) Es handelt sich um eine kanonische Koordinatentransformation, falls die Poissonklammern erhalten bleiben:

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \qquad \{Q_i, Q_j\} = 0 \qquad \{P_i, P_j\} = 0 \tag{4.27}$$

Wir überprüfen nun die einzelnen Fälle:

$$\begin{aligned}
&\{Q_1, P_1\} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial Q_1}{\partial q_i}\frac{\partial P_1}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_i}\frac{\partial P_1}{\partial q_i} = q_2 \frac{1}{q_2 - q_1} + q_1 \frac{-1}{q_2 - q_1} = 1 \\
&\{Q_1, P_2\} = 0 \qquad \{Q_2, P_1\} = 0 \qquad \{Q_2, P_2\} = 1 \qquad \{Q_1, Q_2\} = 0 \\
&\{P_1, P_2\} = \{\frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1} + 1, \frac{q_2 p_2 - q_1 p_1}{q_2 - q_1} - \underbrace{(q_1 + q_2)}_{Q_2}\}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Wir wenden die Linearität der Poissonklammer an und verwenden dabei, dass die Poissonklammer mit einer Konstanten verschwindet und dass $\{P_1, Q_2\} = 0$. Außerdem bezeichnen wir den Nenner als $N := \frac{1}{q_2 - q_1}$ mit $\frac{\partial N}{\partial q_1} = N^2$ und $\frac{\partial N}{\partial q_2} = -N^2$. Die Poissonklammer lautet nun:

$$\begin{aligned}
&\{P_1, P_2\} = \{(p_1 - p_2)N, (q_2 p_2 - p_1 q_1)N\} \\
&i = 1: \qquad (p_1 - p_2)\frac{\partial N}{\partial q_1} \cdot (-q_1)N - N \cdot (-p_1 N + (q_2 p_2 - q_1 p_1)\frac{\partial N}{\partial q_1}) \\
&i = 2: \qquad (p_1 - p_2)\frac{\partial N}{\partial q_2} \cdot q_2 N - (-N) \cdot (p_2 N + (q_2 p_2 - q_1 p_1)\frac{\partial N}{\partial q_2}) \\
&\sum_i = N^3 (-q_1 p_1 + q_1 p_2 + p_1(q_2 - q_1) - q_2 p_2 + q_1 p_1 - q_2 p_1 + \\
&\qquad + q_2 p_2 + p_2(q_2 - q_1) - q_2 p_2 + q_1 p_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \{P_1, P_2\} = 0
\end{aligned}$$

Nach einigen Rechnungen ergibt sich, dass die Poissonklammern invariant gegenüber der Koordinatentransfomration sind, es handelt sich also um eine kanonische Transformation.

4.3 TEILCHEN IM KRAFTFELD

Ein Teilchen der Masse m bewege sich unter Einfluss der Kraft :

$$F = -kq - \frac{\alpha}{q^3} \tag{4.29}$$

a) Verifizieren Sie mithilfe der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen, dass

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 + A\frac{p}{q} \tag{4.30}$$

eine Hamiltonfunktion des Systems ist und bestimmen Sie die Konstante A.

b) Benutzen Sie die kanonische Transformation

$$\begin{aligned}
Q &= \arctan\left(\lambda\frac{q}{p}\right) \\
P &= \frac{\frac{p^2}{\lambda} + \lambda q^2}{2} + \sqrt{\frac{m}{k}}A\frac{p}{q}
\end{aligned}$$

(wobei $\lambda = \sqrt{km}$) um zu zeigen, dass die neue Hamiltonfunktion $H'(Q,P) = \omega P$ (mit $\omega = \sqrt{k/m}$) ist.

c) Lösen Sie die Hamiltonschen BWGLs im $H'(Q,P)$ System mit den Anfangsbedingungen $Q(t=0) = Q_0$ und $P(t=0) = P_0$.

d) Transformieren sie nun zurück zu den ursprünglichen Koordinaten um ihre Lösung als $x(Q_0, P_0, t)$ anzuschreiben. Hierzu können ihnen trigonometrische Funktion des rechts abgebildeten Dreiecks helfen.

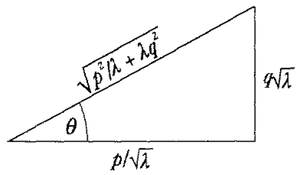

FIGURE 4.1: *Dieses Dreieck kann ihnen in d) helfen.* θ *ist ein Hilfswinkel den Sie mit* $Q(t)$ *identifizieren können sollten.*

Lösung:

a) Die Hamiltonfunktion ist genau dann mit der gegebenen Kraft kompatibel, wenn sie zur selben Bewegungsgleichung führt. Um dies zu zeigen, werden zuerst die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen berechnet:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} + \frac{A}{q}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq + A\frac{p}{q^2} \tag{4.31}$$

Aus der ersten Gleichung sieht man, dass der kanonische Impuls p nicht mit dem kinetischen Impuls $m\dot{q}$ übereinstimmt. Stattdessen gilt:

$$p = m\dot{q} - \frac{A}{q}m, \qquad m\dot{q} = p + \frac{A}{q}m \tag{4.32}$$

Mit der gegebenen Kraft ergibt sich nach Newton die Bewegungsgleichung (2. Newtonschen Axiom):

$$m\ddot{q} = F = -kq - \frac{\alpha}{q^3} \tag{4.33}$$

Um zu prüfen, ob die hamiltonschen Bewegungsgleichungen äquivalent sind, muss man die beiden gekoppelten Gleichungen 1. Ordnung in eine 2. Ordnung überführen. Dafür bietet sich q an, um eine Gleichung der Form von (Gl. 4.33) zu erhalten. Man leitet die Gleichung $\dot{q}$ aus (4.31) nach der Zeit ab, multipliziert mit m und setzt für $\dot{q}$ und $\dot{p}$ wieder (4.31) ein:

$$m\ddot{q} = m\left(\frac{\dot{p}}{m} - \frac{A}{q^2}\dot{q}\right) = -kq - \frac{A^2 m}{q^3} \stackrel{!}{=} -kq - \frac{\alpha}{q^3} \tag{4.34}$$

Aus dem Vergleich mit der Newtonschen Bewegungsgleichung folgt $A = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$. Für diesen Wert der Konstante A ist die Hamiltonfunktion mit der Kraft kompatibel.

b) Nun soll die kanonische Transformation der Hamiltonfunktion durchgeführt werden. Dafür der neue Impuls P unter Verwendung von $\lambda = \sqrt{km}$ umgeschrieben:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\frac{p^2}{\lambda} + \lambda q^2}{2} + \sqrt{\frac{m}{k}}A\frac{p}{q} = \frac{p^2}{2\sqrt{km}} + \frac{\sqrt{km}q^2}{2} + \sqrt{\frac{m}{k}}A\frac{p}{q} \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}}\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 + A\frac{p}{q}\right) = \sqrt{\frac{m}{k}}H(q,p) \end{aligned} \tag{4.35}$$

Der Ausdruck in der Klammer entspricht genau der Hamiltonfunktion $H(q,p)$. Es folgt somit:

$$H'(Q,P) = H(q(Q,P), p(Q,P) + \frac{\partial F}{\partial t} = \sqrt{\frac{k}{m}}P \tag{4.36}$$

$\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ ergibt sich direkt daraus, dass in der gegebenen Transformation die Zeit t nicht explizit vorkommt. Mit $\omega = \frac{k}{m}$ erhält man $H'(Q,P) = \omega P$

c) Die Bewegungsgleichungen für Q, P sind sehr leicht zu lösen:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega \quad \Rightarrow Q(t) = \omega t + Q_0 \tag{4.37}$$

$$\dot{P} = \frac{\partial H}{\partial Q} = 0 \quad \Rightarrow P(t) = P_0 = const. \tag{4.38}$$

Durch die durchgeführte Transformation ist P eine Konstante der Bewegung und nur durch die Anfangsbedingung bestimmt.

d) Abschließend soll nun zurücktransformiert werden um die Lösung für $q(t), p(t)$ zu erhalten. Der besseren Übersicht halber wird die Transformation nochmal angeschrieben:

$$Q = \arctan\left(\lambda \frac{q}{p}\right), \qquad P = \frac{\frac{p^2}{\lambda} + \lambda q^2}{2} + \sqrt{\frac{m}{k}}A\frac{p}{q}$$

Die gegebene Hilfsskizze verdeutlicht, dass Q als Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck mit Gegenkathete der Länge $q\sqrt{\lambda}$ und Ankathete der Länge $\frac{p}{\sqrt{\lambda}}$ aufgefasst werden kann:

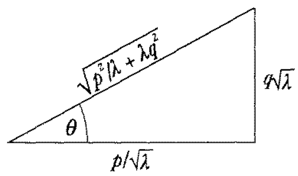

FIGURE 4.2: *Dieses Dreieck kann ihnen in d) helfen. θ ist ein Hilfswinkel den Sie mit $Q(t)$ identifizieren können sollten.*

$$\tan(Q) = \lambda\frac{q}{p}, \quad \text{definiere} \quad h = \sqrt{\frac{p^2}{\lambda} + \lambda q^2} \tag{4.39}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda}q = h\cos(Q), \qquad \frac{p}{\sqrt{\lambda}} = h\sin(Q) \tag{4.40}$$

h kann mit Hilfe von Q und P ausgedrückt werden:

$$h^2 = \frac{p^2}{\lambda} + \lambda q^2, \qquad \frac{p}{q} = \frac{\lambda}{\tan(Q)} \tag{4.41}$$

$$\Rightarrow P = \frac{h^2}{2} + \sqrt{\frac{m}{k}}A\frac{\lambda}{\tan(Q)}, \quad h = \sqrt{2P - \sqrt{\frac{m}{k}}A\frac{2\lambda}{\tan(Q)}} \tag{4.42}$$

Es folgt schließlich mit (4.40), sowie $\lambda = \sqrt{km}$:

$$q = \cos(Q)\sqrt{\frac{2P}{\sqrt{km}} - \sqrt{\frac{m}{k}}A\frac{2}{\tan(Q)}} \tag{4.43}$$

$$p = \sin(Q)\sqrt{2P\sqrt{km} - \sqrt{\frac{m}{k}}A\frac{2km}{\tan(Q)}} \tag{4.44}$$

Setzt man noch für $Q(t)$ und $P(t)$ die aus *c)* bekannten Lösungen ein, erhält man $q(t)$ und $p(t)$:

$$q = \cos(\omega t + Q_0)\sqrt{\frac{2P_0}{\sqrt{km}} - \sqrt{\frac{m}{k}}A\frac{2}{\tan(\omega t + Q_0)}} \tag{4.45}$$

$$p = \sin(\omega t + Q_0)\sqrt{2P_0\sqrt{km} - \sqrt{\frac{m}{k}}A\frac{2km}{\tan(\omega t + Q_0)}} \tag{4.46}$$