5. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 24.01.2023

5.1 HAMILTON-JACOBI UND DER HARMONISCHE OSZILLATOR

a) Zeigen Sie, dass

$$S(q,\alpha,t) = \frac{m\omega}{2}\left(q^2+\alpha^2\right)\frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} - m\omega\frac{q\alpha}{\sin(\omega t)} \tag{5.1}$$

eine Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung für den eindimensionalen Hamiltonian

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{5.2}$$

darstellt (Hinweis: bestimmen Sie die Vorfaktoren. von q^2, q und α^2.).

b) Bestimmen Sie die zu α konjugierten Variablen β.

c) Zeigen Sie durch Auflösung der Gleichung nach $q(t)$, dass dies die Lösung des harmonischen Oszillators darstellt.

Lösung:

a) Die Bedingung dafür ist, dass

$$\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial t} + H(q, \partial S(q,\alpha,t)/\partial q, t)q) = 0 \tag{5.3}$$

also drücken wir zuerst $\partial S(q,\alpha,t)/\partial q$ und $\partial S(q,\alpha,t)/\partial t$ aus

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{m\omega^2}{2}(q^2+\alpha^2)\frac{1}{\sin^2(\omega t)} + m\omega^2 q\alpha\frac{\cos(\omega t)}{\sin^2(\omega t)} \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p = m\omega q\cot(\omega t) - \frac{m\omega\alpha}{\sin(\omega t)} \tag{5.5}$$

Nun substituieren wir für p^2 im Hamiltonian:

$$p^2 = m^2\omega^2 q^2\frac{\cos^2(\omega t)}{\sin^2(\omega t)} - 2m^2\omega^2 q\alpha\frac{\cos(\omega t)}{\sin^2(\omega t)} + m^2\omega^2\alpha^2\frac{1}{\sin^2(\omega t)} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
H &= \frac{m\omega^2 q^2}{2} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}\frac{\cos^2(\omega t)}{\sin^2(\omega t)} - m\omega^2 q\alpha\frac{\cos(\omega t)}{\sin^2(\omega t)} + \frac{m\omega^2\alpha^2}{2}\frac{1}{\sin^2(\omega t)} \\
&= \frac{m\omega^2}{2}(q^2\sin^2(\omega t) + q^2\cos^2(\omega t) + \alpha^2)\frac{1}{\sin^2(\omega t)} - m\omega^2 q\alpha\frac{\cos(\omega t)}{\sin^2(\omega t)} \\
&= \frac{m\omega^2}{2}(q^2+\alpha^2)\frac{1}{\sin^2(\omega t)} - m\omega^2 q\alpha\frac{\cos(\omega t)}{\sin^2(\omega t)} \\
&= -\frac{\partial S}{\partial t}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

womit die Bedingung erfüllt ist.

b)

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = m\omega\alpha \cot(\omega t) - \frac{m\omega q}{\sin(\omega t)} \tag{5.8}$$

c)

$$q(t) = \alpha \cos(\omega t) - \beta \frac{\sin(\omega t)}{m\omega} \tag{5.9}$$

Diese Bewegungsgleichung entspricht einem harmonischem Oszillator mit $q_0 = \alpha$ und $p_0 = \beta$

5.2 HAMILTON-JACOBI UND DAS PROJEKTIL

Ein Projektil der Masse m wird zum Zeitpunkt $t = 0$ mit Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel δ zur Horizontalen abgeschossen. Die Hamiltonfunktion des Systems ist:

$$H(x, z, p_x, p_z) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + mgz \tag{5.10}$$

a) Beschreiben Sie kurz aber vollständig nachvollziehbar die Lösungsstrategie zur Bestimmung der Trajektorien nach der Hamilton-Jacobi-Gleichung.

b) Stellen Sie nun explizit die Hamilton-Jacobi Gleichung für das System auf. Zeigen Sie, dass S wie folgt separierbar ist

$$S(x, \alpha_x, z, E, t) = W_z(z, E) + \alpha_x x - Et \tag{5.11}$$

und schreiben Sie die separierten DGL's an.

c) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion W_z und die Hamiltonsche Prinzipalfunktion S.

d) Bestimmen Sie $\beta_1 = \partial S/\partial E$ und $\beta_2 = \partial S/\partial \alpha_x$. Formen sie anschließend auf $x(t)$ und $z(t)$ um.

Solution:

a)
- If not already given, in the first step we must construct the Hamiltonian describing the system.
- In the second step we substitute the momenta in the Hamiltonian by the derivatives of the principal $S(\mathbf{q}, \alpha, t)$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \alpha, t)}{\partial \mathbf{q}} \tag{5.12}$$

- Now we can combine the results obtained in the first two steps, and write down the Hamilton-Jacobi equation.
- The last challenge is to solve the equation. To note is that in the special case of conservative systems (i.e. the Hamiltonian does not depend on time) the principal function $S(\mathbf{q}, \alpha, t)$, is separable in its time coordinate. This implies that we can write $S(\mathbf{q}, \alpha, t)$ as

$$S(\mathbf{q}, \alpha, t) = W(\mathbf{q}, \alpha) - Et. \tag{5.13}$$

b) As previously described, we substitute in the Hamiltonian the momenta by the derivatives of the principal function $S(\mathbf{q}, \alpha, t)$

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right) + mgz = -\frac{\partial S}{\partial t} \tag{5.14}$$

We can now use the suggested Ansatz, and write

$$\frac{1}{2m}\left(\alpha_x^2 + \left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2\right) + mgz = E \tag{5.15}$$

Now we need to solve this equation for W_z!

c) Eq.(5.15) can be solved by simple integration:

$$\frac{\partial W_z}{\partial z} = \sqrt{\gamma^2 - 2m^2 gz} \tag{5.16}$$

where $\gamma^2 = 2mE - \alpha_x^2$. We integrate by substitution:

$$\xi = \gamma^2 - 2m^2 gz, \qquad dz = -\frac{1}{2m^2 g} d\xi \tag{5.17}$$

We thus obtain the simple integral

$$W_z = -\frac{1}{2m^2 g}\int d\xi \sqrt{\xi} = -\frac{1}{3m^2 g}(\gamma^2 - 2m^2 gz)^{\frac{3}{2}} + c_1 \tag{5.18}$$

For convenience we set $c_1 = 0$. We can now write the principal function S as

$$S = \alpha_x x - \frac{1}{3m^2 g}(\gamma^2 - 2m^2 gz)^{\frac{3}{2}} - Et \tag{5.19}$$

d) In this last step we compute the final expressions for $x(t)$ and $z(t)$. We do that by computing the derivatives

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t - \frac{1}{mg}(2mE - \alpha_x^2 - 2m^2 gz)^{\frac{1}{2}} \tag{5.20}$$

and

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_x} = x + \frac{1}{m^2 g}\alpha_x (2mE - \alpha_x^2 - 2m^2 gz)^{\frac{1}{2}} \tag{5.21}$$

The solutions of these two equations for x and z are:

$$x(t) = \beta_2 + \frac{\alpha_x \beta_1}{m} + \frac{t\alpha_x}{m} \tag{5.22}$$

$$z(t) = \frac{E}{gm} - \frac{gt^2}{2} - \frac{\alpha_x^2}{2gm^2} - gt\beta_1 - \frac{g\beta_1^2}{2} \tag{5.23}$$

We can now use the fact that the initial velocity is given, with components

$$v_{0x} = v_0 \cos\delta, \qquad v_{0z} = v_0 \sin\delta \tag{5.24}$$

The initial velocity, together with the assumed to be known initial position (x_0,z_0), provide 4 equations with which we can express the variables β_1,β_2, E and α_x as a function of the initial velocity and position. We obtain

$$\alpha_x = v_{0x} m, \qquad \beta_1 = -\frac{v_{0z}}{g}, \qquad \beta_2 = x_0 - \frac{\alpha_x \beta_1}{m} \tag{5.25}$$

$$E = gm\left(z_0 + \frac{\alpha_x^2}{2gm^2} + g\frac{\beta_1^2}{2}\right) \tag{5.26}$$

Inserting these results in the expressions for $x(t)$ and $z(t)$ yields the known solutions

$$x(t) = tv_{0x} + x_0, \qquad z(t) = z_0 - \frac{gt^2}{2} + tv_{0z}. \tag{5.27}$$

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einer Raumdimension unter Einfluss des folgenden Potentials:

$$V(x) = F|x| \tag{5.28}$$

a) Skizzieren Sie das Potential.

b) Schreiben Sie die Hamilton-Jacobi Gleichung des Systems an.

c) Berechnen Sie für die Wirkungs-Winkel Variablen das Wirkungsintegral

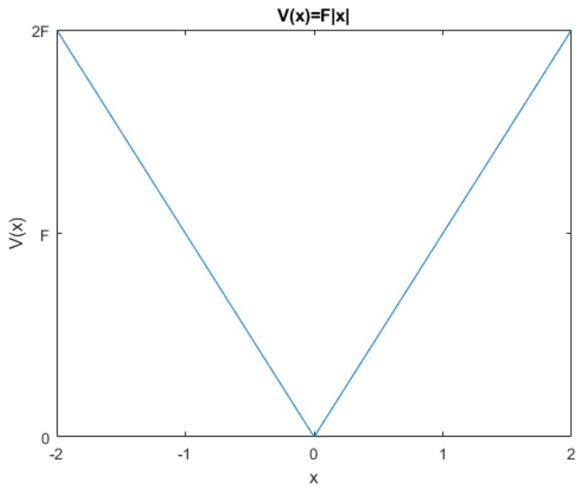
$$I = \oint \frac{\partial W}{\partial x} dx \tag{5.29}$$

(Wählen sie hierfür eine maximale Auslenkung x_m und integrieren über eine Viertel Periode).

d) Drücken sie nun die Energie als Funktion dieser Wirkung aus und bestimmen Sie die Frequenz $\dot{\theta}(E)$.

Lösung:

a) Das Potential sieht wie folgt aus:



b) Der Hamiltonian eines Teilchens im gegebenen Potential $V(x)$ ergibt sich zu

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + F|x|$$

Da ein konservatives System vorliegt, ist die Zeit in der Prinzipalfunktion $S(x, \alpha, t)$ separierbar, also

$$S(x, \alpha, t) = W(x, \alpha) - Et,$$

eingesetzt in die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H(x, p = \frac{\partial}{\partial x} S(x, \alpha, t), t) + \frac{\partial}{\partial t} S(x, \alpha, t) = 0$$

ergibt sich damit

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W(x, \alpha)}{\partial x} \right)^2 + F|x| = E.$$

c) Die Wirkungsvariable I ergibt sich aus dem Integral über eine volle Periode, die sich in vier Teilintegrale aufspalten lässt. Die Teilintegrale nehmen jeweils einen Teil des Weges $x = 0 \to x_m \to 0 \to x_m \to 0$ und sind aufgrund der Tatsache, dass x nur im Absolutbetrag auftritt, ident. Damit kann bei Wahl von positivem x_m der Betrag weggelassen werden und es folgt

$$I = 2\pi \oint \frac{\partial}{\partial x} W(x, \alpha) dx = 2\pi \cdot 4 \int_0^{x_m} \sqrt{2m(E - Fx)} = \left| \begin{matrix} c\xi = 2m(E - Fx) \\ d\xi = -2mF\, dx \end{matrix} \right| =$$
$$= 2\pi \frac{4}{2mF} \int_{2m(E - Fx_m)}^{2mE} \sqrt{\xi} d\xi = 2\pi \frac{4}{3F} \sqrt{m} (2E)^{3/2}.$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, dass bei der Maximalauslenkung $x = x_m$ die Energie rein potentiell ist ($Fx_m = E$), womit die untere Integralgrenze verschwindet.

d) Umformen ergibt

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi F I}{2\sqrt{m}} \right)^{2/3},$$

was eine Hamiltonfunktion $H(I, \theta, t)$ mit den neuen Variablen Wirkung I und Winkel θ ist (der nicht explizit vorkommt). Mit der Hamilton-Bewegungsgleichung für θ ergibt sich damit die Frequenz $\dot{\theta}(E)$ zu

$$\dot{\theta}(E) = \frac{\partial}{\partial I} H(I, \theta, t) = \frac{1}{3} \left(\frac{3\pi F}{2\sqrt{Im}} \right)^{2/3},$$

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
5.1a / bc / 5.2ab / c / d / 5.3 ab / c / d