

5.1 HAMILTON-JACOBI UND DER HARMONISCHE OSZILLATOR

a) Zeigen Sie, dass

$$S(q, \alpha, t) = \frac{m\omega}{2} (q^2 + \alpha^2) \frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} - m\omega \frac{q\alpha}{\sin(\omega t)} \quad (5.1)$$

eine Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung für den eindimensionalen Hamiltonian

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (5.2)$$

darstellt (Hinweis: bestimmen Sie die Vorfaktoren. von q^2 , q und α^2).

b) Bestimmen Sie die zu α konjugierten Variablen β .

c) Zeigen Sie durch Auflösung der Gleichung nach $q(t)$, dass dies die Lösung des harmonischen Oszillators darstellt.

5.2 HAMILTON-JACOBI UND DAS PROJEKTIL

Ein Projektil der Masse m wird zum Zeitpunkt $t = 0$ mit Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel δ zur Horizontalen abgeschossen. Die Hamiltonfunktion des Systems ist:

$$H(x, z, p_x, p_z) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + mgz \quad (5.3)$$

a) Beschreiben Sie kurz aber vollständig nachvollziehbar die Lösungsstrategie zur Bestimmung der Trajektorien nach der Hamilton-Jacobi-Gleichung.

b) Stellen Sie nun explizit die Hamilton-Jacobi Gleichung für das System auf. Zeigen Sie, dass S wie folgt separierbar ist

$$S(x, \alpha_x, z, E, t) = W_z(z, E) + \alpha_x x - Et \quad (5.4)$$

und schreiben Sie die separierten DGL's an.

c) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion W_z und die Hamiltonsche Prinzipalfunktion S .

d) Bestimmen Sie $\beta_1 = \partial S / \partial E$ und $\beta_2 = \partial S / \partial \alpha_x$. Formen sie anschließend auf $x(t)$ und $z(t)$ um.

5.3 HAMILTON-JACOBI UND WIRKUNGS-WINKEL VARIABLEN

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einer Raumdimension unter Einfluss des folgenden Potentials:

$$V(x) = F|x| \quad (5.5)$$

- a) Skizzieren Sie das Potential.
- b) Schreiben Sie die Hamilton-Jacobi Gleichung des Systems an.
- c) Berechnen Sie für die Wirkungs-Winkel Variablen das Wirkungsintegral

$$I = \oint \frac{\partial W}{\partial x} dx \quad (5.6)$$

(Wählen sie hierfür eine maximale Auslenkung x_m und integrieren über eine Viertel Periode).

- d) Drücken sie nun die Energie als Funktion dieser Wirkung aus und bestimmen Sie die Frequenz $\dot{\theta}(E)$.

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):

5.1a / bc / 5.2ab / c / d / 5.3 ab / c / d