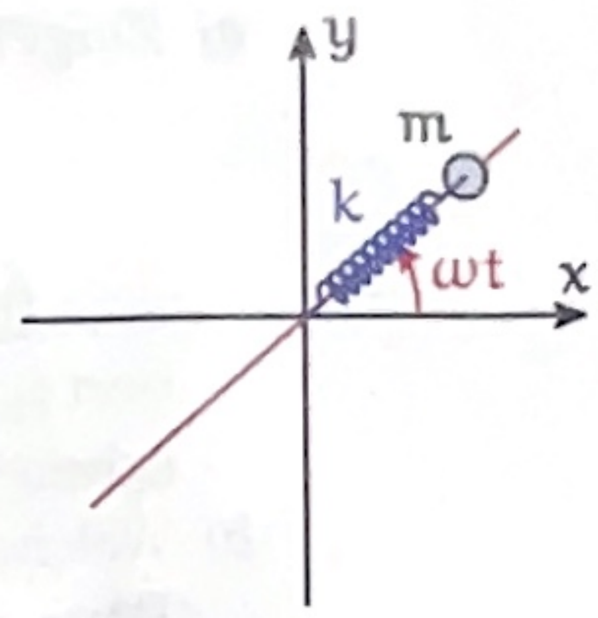
1. TEST ANALYTISCHE MECHANIK VU, 29.01.2024

1 PERLE AUF ROTIERENDEM STAB MIT FEDER (18 PUNKTE)

Eine Perle der Masse m kann sich reibungsfrei auf einem unendlich langen Stab bewegen. Der Stab ist im Koordinatenursprung verankert und dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in der xy-Ebene, d.h. der Stab ist zum Zeitpunkt t gegenüber der x-Achse um den Winkel $\alpha(t) = \omega t$ gedreht. Darüber hinaus zieht eine Feder mit Federkonstante k die Perle in Richtung des Koordinatenursprungs (d.h. die Feder ist entspannt, wenn sich die Perle im Koordinatenursprung befindet).



a) Welche Art von Zwangsbedingung liegt vor? Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Ist in diesem System die Energie erhalten (mit kurzer Begründung)?

b) Finden Sie (eine) geeignete generalisierte Koordinate(n), stellen Sie die Lagrangefunktion auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichung(en) ab.

c) Bevor (bzw. ohne dass) Sie die Bewegungsgleichung(en) explizit lösen: Lassen Sie Ihre Physik-Intuition spielen und überlegen Sie, welche Art von Bewegung Sie jeweils für $\omega^2 < k/m$ und $\omega^2 > k/m$ erwarten.

d) Lösen Sie die Bewegungsgleichung(en) für den Fall $\omega^2 < k/m$ und die Anfangsbedingungen $(x(0), y(0)) = (x_0, 0)$ und $(\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (0, x_0\omega)$. Skizzieren Sie die Lösungskurve(n), d.h. die generalisierte(n) Koordinate(n) als Funktion(en) der Zeit t.

e) Schließen Sie aus Ihrer Lösung in Unterpunkt *d)* auf die Lösung für den Fall $\omega^2 > k/m$ mit gleichen Anfangsbedingungen wie in *d)*. Skizzieren Sie auch für diesen Fall die Lösungskurve(n).
Hinweis: $\sin(\pm iz) = \pm i \sinh(z)$, $\cos(\pm iz) = \cosh(z)$.

2 NOETHER-THEOREM (16 PUNKTE)

a) Was besagt das Noether-Theorem (in Ihren Worten, ohne Formeln)?

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der (totalen) zeitlichen Änderung einer Observable $g(q, p)$ in einem System mit der Hamiltonfunktion $H(q, p)$, dem Hamiltonschen Vektorfeld v_H und der Poisson-Klammer $\{g, H\}$?

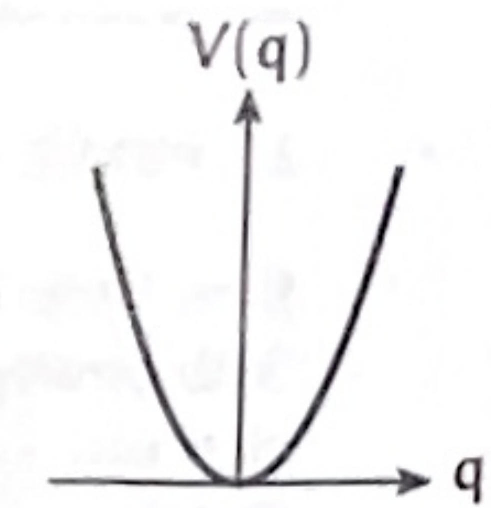
c) Erklären Sie in Analogie zu Ihrer Antwort in *b)* nunmehr den Zusammenhang zwischen der Poisson-Klammer $\{H, g\}$ und der durch die Observable g generierten Transformation. Wie lässt sich das Noether-Theorem mithilfe dieses Zusammenhangs und Ihrer Antwort zu *b)* formal ausdrücken?

d) Was ergibt sich für die Wahl $g = H$? Identifizieren Sie die Symmetrie und die resultierende Erhaltungsgröße.

e) Geben Sie (abgesehen von dem in Unterpunkt *d)* behandelten Fall) zwei weitere wichtige Beispiele für die Anwendung des Noether-Theorems in der analytischen Mechanik an.

Emmy Noether

3 ERHALTUNGSGRÖSSEN (15 PUNKTE)



Wir betrachten einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit der Hamiltonfunktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass für den harmonischen Oszillator die Observable

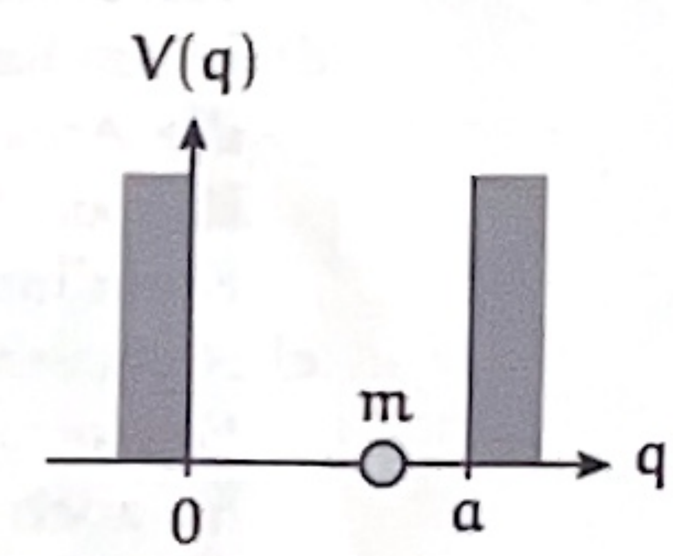
$$f(q,p,t) := p\cos(\omega t) + qm\omega \sin(\omega t) \tag{2}$$

eine Erhaltungsgröße ist. Berechnen Sie dazu die totale Zeitableitung von $f(q,p,t)$ und benutzen Sie an den geeigneten Stellen die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

b) Welche Beziehung muss zwischen der partiellen Ableitung $\partial_t f$ und der Poisson-Klammer $\{f, H\}$ bestehen, wenn f eine Erhaltungsgröße ist?

c) Welche andere(n) Erhaltungsgröße(n) kennen Sie für den harmonischen Oszillator? Wenn diese andere(n) Erhaltungsgröße(n) vorgegeben ist (sind), in welchem Wertebereich kann dann die Erhaltungsgröße f liegen? Werten Sie dazu $f(q(t), p(t), t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ aus.

4 WIRKUNGS- UND WINKELVARIABLEN (16 PUNKTE)



Eine Punktmasse m bewege sich im eindimensionalen, „unendlich tiefen" Potentialtopf der Länge $a > 0$, d.h. die Wände bei den Positionen $q = 0$ und $q = a$ sind unendlich hoch. Die Koordinate q der Punktmasse kann nur Werte aus dem Intervall $[0, a]$ annehmen. Die Hamiltonfunktion lautet

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} \tag{3}$$

und die Reflexion an den Wänden des Potentialtopfes wird so modelliert, dass sich der Impuls der Punktmasse augenblicklich umkehrt ($p \mapsto -p$ bzw. $-p \mapsto p$), sobald die Punktmasse eine der Wände erreicht.

a) Ist die Bewegung der Punktmasse periodisch oder quasi-periodisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Wo (im Konfigurationsraum) befinden sich die Umkehrpunkte der Bewegung? Hängen diese von der Energie E der Punktmasse ab? Wenn ja, wie?

c) Wie groß ist der Betrag der Geschwindigkeit $|v|$ der Punktmasse für eine vorgegebene Energie E? Ist $|v|$ eine Konstante der Bewegung?

d) Bestimmen Sie mit Ihrem Ergebnis aus Unterpunkt *c)* die Periodendauer $T(E)$ als Funktion der Energie E.

e) Skizzieren Sie das Phasenraumportrait des Systems, indem Sie mindestens zwei Trajektorien zu verschiedenen Energien einzeichnen.

f) Berechnen Sie die Wirkungsvariable $I(E)$.

g) Ermitteln Sie die Periodendauer $T(E)$ aus der Beziehung zwischen I und E und vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis aus Unterpunkt *d)*.