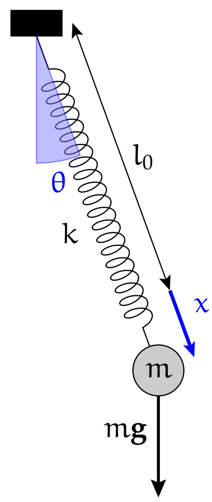
1. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 05.12.2023

1.1 FEDERPENDEL IN 2D

Gegeben sei das rechts abgebildete Federpendel, dessen oberes Ende fixiert ist und welches sich in zwei Raumdimensionen (Papierebene) bewegen kann. Die masselose Feder habe die Federkonstante k und in entspanntem Zustand (ohne äußere Kräfte) die Länge l_0. Am unteren Ende der Feder sei eine Punktmasse mit der Masse m befestigt. Die Bewegung des Pendels unter dem Einfluss der Gravitation wird mit den Koordinaten θ (Winkel) und x (Pendellänge minus l_0) beschrieben.



a) Stellen Sie die Lagrangefunktion $L = T - V$ auf.

b) Schreiben Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen an und bestimmen Sie die Ruhelage (x_0, θ_0) des Pendels. Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

c) Ist es möglich, dass $\theta(t) = \theta_0$ bleibt und nur eine Bewegung in x stattfindet? Ist es möglich, dass $x(t) = x_0$ bleibt und nur eine Bewegung in θ stattfindet?

d) Betrachten Sie nun kleine Auslenkungen aus der Ruhelage, $(x, \theta) = (x_0 + \delta x, \theta_0 + \delta\theta)$ und stellen Sie die linearisierten Bewegungsgleichungen für δx und $\delta\theta$ auf. Entwickeln Sie dafür in den Bewegungsgleichungen alle auftretenden Funktionen bis zur linearen Ordnung in δq bzw. $\delta\dot{q}$ (für $q = x, \theta$) und vernachlässigen Sie alle Terme, die mehr als einen Faktor δq oder $\delta\dot{q}$ enthalten. Welche Art von Bewegungsgleichungen ergeben sich? Gibt es in linearer Ordnung eine Kopplung der Freiheitsgrade x und θ?

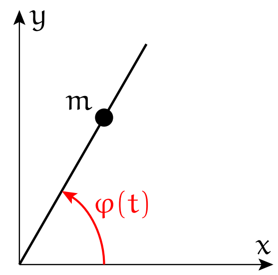
1.2 ZWANGSBEDINGUNGEN IM PRATER

Der Wiener Wurstelprater eignet sich hervorragend, um alle möglichen Zwangsbedingungen am eigenen Leib zu erfahren. Klassifizieren Sie die Zwangsbedingungen (holonom oder nicht-holonom, skleronom oder rheonom), denen Sie in den folgenden Fahrgeschäften ausgesetzt sind:

- Autodrom: autonome Bewegung in einem Fahrzeug innerhalb einer räumlich begrenzten Fahrfläche.
- Tornado: Bewegung in einer frei rotierenden „Schaukel“, die am Ende einer rotierenden Stange aufgehängt ist.
- Klassische Achterbahn: Bewegung entlang einer Achterbahnstrecke.
- Tagada: Bewegung auf einem rotierenden, großen Teller, mit Aufstehen und Springen.

1.3 PERLE AUF ROTIERENDEM STAB

Eine Perle der Masse m kann sich reibungsfrei auf einem halb-unendlichen Stab bewegen, dessen Ende im Ursprung verankert ist. Der Stab dreht sich in der xy-Ebene gemäß einer vorgegebenen Funktion $\varphi(t)$, siehe Abbildung.

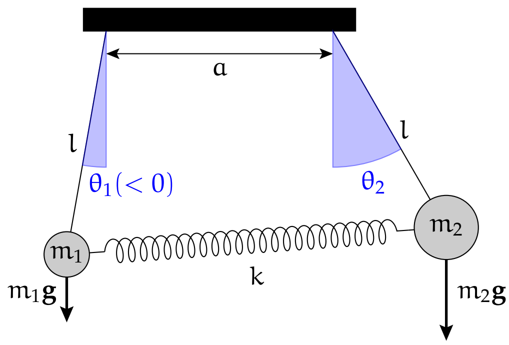


a) Welche Art von Zwangsbedingung liegt vor? Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Finden Sie geeignete generalisierte Koordinaten, stellen Sie die Lagrangefunktion auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen ab.

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für $\varphi(t) = \omega t$, $(x(0), y(0)) = (x_0, 0)$ und $(\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (-\omega x_0, \omega x_0)$. Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

1.4 GEKOPPELTE PENDEL

Wir betrachten das hier abgebildete System:



Die oberen Enden zweier masseloser Stäbe der Länge l sind im Abstand a drehbar befestigt. An den unteren Enden befindet sich je eine Punktmasse, links m_1 und rechts m_2. Diese Punktmassen sind durch eine masselose Feder miteinander verbunden, die eine Federkonstante k und in entspanntem Zustand (ohne äußere Kräfte) die Länge a hat. Die Punktmassen stehen zusätzlich unter dem Einfluss der Schwerkraft und können sich nur in zwei Raumdimensionen (Papierebene) bewegen. Die Dynamik des Systems wird mit den beiden Winkeln θ_1 und θ_2 (siehe Abbildung) beschrieben.

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion $L = T - V$ auf. Beachten Sie, dass sie auch für große Winkel θ_i gültig sein soll. Etwaige Kollisionen zwischen den Objekten können Sie jedoch ignorieren (indem Sie z.B. $a > 2l$ und $\theta_i \in (-\pi/2, \pi/2)$ annehmen).

b) Für den Fall kleiner Auslenkungen $|\theta_i| \ll 1$ führen wir neue Koordinaten $x_i := l \cdot \theta_i$ ein. Was bedeuten diese Koordinaten physikalisch? Entwickeln Sie die Lagrangefunktion bis zur quadratischen Ordnung in diesen Koordinaten bzw. ihren zeitlichen Ableitungen.

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
1.1 *ab* / 1.1 *c* / 1.1 *d* / 1.2 / 1.3 *a* / 1.3 *b* / 1.4 *a* / 1.4 *b*