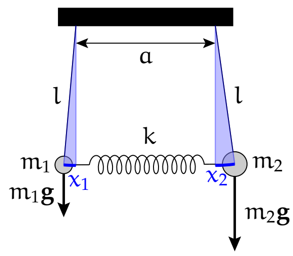
2. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 12.12.2023

2

2.1 GEKOPPELTE PENDEL (TEIL 2)

Wir greifen das Beispiel 1.4 vom vorangegangenen Tutorium auf. Es geht dabei um zwei Pendel mit der Länge l, an deren Enden die Massen m_1 bzw. m_2 befestigt sind, die wiederum über eine Feder mit der Federkonstante k miteinander verbunden sind. Darüber hinaus wirkt die Schwerkraft mit ihrer Gravitationsbeschleunigung g. Im vorigen Tutorium haben Sie für kleine Auslenkungen die folgende genäherte Lagrangefunktion hergeleitet:



$$L = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{m_1 g}{2l}x_1^2 - \frac{m_2 g}{2l}x_2^2 - \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2, \tag{2.1}$$

wobei x_1 und x_2 die Auslenkungen der Pendel aus ihrer jeweiligen Ruhelage (entlang der Kreisbögen) bezeichnen.

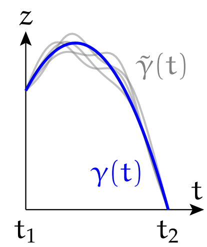
a) Schreiben Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für x_1 und x_2 an. Diese können in die Form $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}\mathbf{x}$ gebracht werden, wobei $\mathbf{x} := (x_1, x_2)^\top$. Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{D}$.

b) Eigenmoden von schwingenden Systemen sind dadurch definiert, dass alle Konstituenten mit der gleichen Frequenz schwingen. Um die Eigenmoden des vorliegenden Systems zu bestimmen, machen wir also den Ansatz $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{i\omega t}$. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen $\mathbf{x}_0$ und ω und den Eigenvektoren und Eigenwerten von $\mathbf{D}$?

c) Bestimmen Sie alle möglichen Lösungen für $\mathbf{x}_0$ und ω und interpretieren Sie sie physikalisch.

2.2 VARIATIONSPRINZIP

Eine Punktmasse der Masse m bewege sich senkrecht im Gravitationspotential $V(z) = mgz$. Wir wollen mithilfe des Variationsprinzips validieren, dass $\gamma(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ eine physikalische Lösung ist.



a) Stellen Sie das Wirkungsfunktional $S[\tilde{\gamma}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\tilde{\gamma}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t))dt$ für die Bahn $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \delta(t)$ auf, wobei $\delta(t)$ beliebig, aber stetig differenzierbar mit $\delta(t_1) = \delta(t_2) = 0$ sei.

b) Zeigen Sie, dass das Wirkungsfunktional minimal wird genau dann, wenn $\delta(t) \equiv 0$.

2.3 LEGENDRE-TRANSFORMATION

Die Lagrangefunktion für ein Teilchen ist gegeben durch

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2m}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \tag{2.2}$$

mit einem radialsymmetrischen Potential $V(\sqrt{x^2 + y^2}) = V(r)$.

a) Ist eine der Koordinaten x, y zyklisch?

b) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion in Polarkoordinaten $\tilde{L}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi})$. Bestimmen Sie die konjugierten Impulse.

c) Ist jetzt eine der Koordinaten r, ϕ zyklisch? Was bedeutet das für die zugehörigen konjugierten Impulse p_r, p_ϕ? Können Sie das Noether-Theorem anwenden?

d) Führen Sie eine Legendre-Transformation durch und bestimmen Sie die Hamiltonfunktion $H(r, \phi, p_r, p_\phi)$ des Problems.

2.4 EICHINVARIANZ DER LAGRANGEFUNKTION

Zwei Lagrangefunktionen eines Teilchens mit Masse m und Ladung Q im konstanten, homogenen elektrischen Feld **E** seien gegeben durch

$$L_1 = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}, \tag{2.3}$$

$$L_2 = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - Qt\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \tag{2.4}$$

a) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für beide Fälle auf. Zeigen Sie explizit, dass man die gleiche Bewegungsgleichung erhält.

b) Begründen Sie ihr Ergebnis aus *a)* über eine mechanische Eichtransformation $F(\mathbf{r}, t)$.

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
2.1 *ab* / 2.1 *c* / 2.2 *a* / 2.2 *b* / 2.3 *ab* / 2.3 *cd* / 2.4 *a* / 2.4 *b*